Begründen und Schlussfolgern

1. Begründungen

➢ **Begründung** = gesprochener oder geschriebener Text, der zeigen soll, dass

- eine **Annahme** *wahrscheinlich,*
- eine **Feststellung** *zutreffend,*
- eine **Vermutung** *begründet,*
- ein **Bericht** *plausibel,*
- eine **Voraussage** *berechtigt,*
- ein **Schluss** *unausweichlich* ist usw.

- Annahmen, Feststellungen, Vermutungen, Berichte, Voraussagen, die Schlussfolgerung selbst usw. nennt man
  – „deskriptiv“
  – „empirisch“
  – „konstativ“
  – „kognitiv“ oder so ähnlich.

- Für die Frage, **was** eine Begründung ist, spielen solche Überlegungen **keine** Rolle.

➢ **Begründungen** dienen auch dazu zu zeigen, dass

- ein **Rat** *gut,*
- eine **Warnung** *gerechtfertigt,*
- eine **Empfehlung** *vernünftig,*
- ein **Vorschlag** *aussichtsreich* ist usw.

➢ **Begründungen** sind Versuche, jemanden zu überzeugen.

➢ Begründungen müssen von *Versuchen,*
  – jemanden zu *überreden,*
  – jemanden *unter Druck* zu *setzen* oder
  – *seine Meinung suggestiv zu ändern*
  unterschieden werden.

2. Begründungen von Annahmen – Erklärungen von Tatsachen

- Begründungen für **Annahmen über** Tatsachen ≠
  Erklärungen für das **Aussehen von** Tatsachen

➢ In **Begründungen** wird gesagt, warum man etwas glauben soll.

➢ In **Erklärungen** wird gesagt, warum etwas so und nicht anders ist.

Diese Unterscheidung ist in der Alltagssprache ohne zusätzliche Absprachen häufig nicht leicht zu treffen.

3. Prämisse und Konklusion

➢ In jeder Begründung gibt es etwas,

- **(Konklusion) was** begründet wird, nämlich die betreffende Annahme, Behauptung, Vermutung usw. und etwas,
- **(Prämisse[n]) womit** sie begründet wird, d.h. die Argumente, auf die man sich stützt.

➢ Begründungen können **eine oder mehrere Prämissen** haben, aber jeweils **nur eine Konklusion** [sonst haben wir mehrere Begründungen].

Die **allgemeine Form einer Begründung** lässt sich schematisch darstellen als

Prämisse
Konklusion

1. Prämisse 2. Prämisse
Konklusion

1. Prämisse ⋮ *n*-te Prämisse
Konklusion

$$\frac{A_1 \quad \vdots \quad A_n}{B}$$

Die Umgangssprache kennt eine große Zahl von syntaktisch sehr unterschiedlichen Mitteln – *Ausdrücken* und *Konstruktionen*), mit deren Hilfe der Sprecher explizit machen kann,

- **welche Behauptung oder Annahme** er begründen will (Konklusion) und
- **mit welchen Argumenten** er sie begründen will (Prämissen)

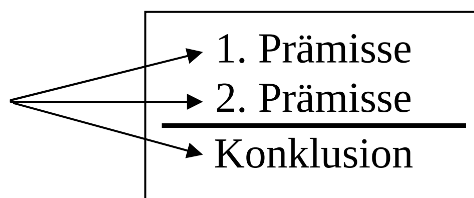
- **Prämisse**: „da“, „weil“, „wenn“, „im Hinblick darauf, dass“, „mit Bezug auf“, …

- **Konklusion**: „dann“, „somit“, „also“, „folglich“, „daraus ergibt sich, dass“, Interpunktionszeichen …

4. Inhaltliche und formale Beurteilung von Begründungen

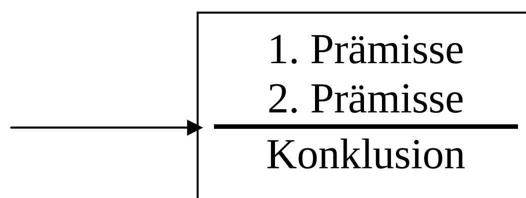
- **Begründungen** kann man
  - als überzeugend, stringent, direkt usw. *loben* oder
  - als schwach, lückenhaft, weit hergeholt usw. *tadeln*.

- Die **Beurteilung** einer Begründung ist **inhaltlich**, wenn in ihr zum sachlichen Zutreffen einer, mehrerer oder aller Prämissen oder zum sachlichen Zutreffen der Konklusion Stellung genommen wird.



- Die **Beurteilung** einer Begründung ist **formal**, wenn in ihr *nicht* zum sachlichen Zutreffen von Prämissen oder Konklusion Stellung genommen wird, sondern wenn man in ihr

1. von der Annahme ausgeht, die Prämissen träfen zu,
2. offen lässt, ob die Konklusion zutrifft und
3. drittens lediglich fragt, wie viel die Prämissen, wenn sie zuträfen, für die Konklusion hergeben würden.



- **In der Logik geht es ausschließlich um die formale Beurteilung von Begründungen.**
- **Die formale Beurteilung** nimmt Stellung zur **Relevanz** und zum **Gewicht** der Prämisse(n) **für** die Konklusion.

5. Praktisch zwingende Begründungen und analytische Schlüsse

- **Praktisch zwingende Begründungen** beinhalten das Verlassen auf bestimmte Fakten, die man selbst nicht mit eigenen Augen gesehen hat, deren Zeuge man nicht persönlich ist. („Trivialitäten“, „Selbstverständlichkeiten“).

- Praktisch zwingende Begründungen lassen **Korrekturen** zu. („Bisher hatte ich immer angenommen, dass das eine zwingende Begründung ist.“ / „Das hatte ich bisher stets als logisch empfunden. Ich habe mich wohl geirrt.“)

- Eine Beurteilung als „(praktisch) zwingend“ ist eine **formale** Beurteilung.

- In **analytischen Schlüssen** ist jemand, der die Prämissen als wahr unterstellt bzw. ihre Wahrheit akzeptiert, **unausweichlich** bzw. **ohne Ausnahme auf die Konklusion festgelegt**.

- **Analytische Schlüsse** sind die **strengste Form des formalen Zusammenhangs** zwischen Prämissen und Konklusion.

- In gewisser formaler Weise ist **in den Prämissen die Konklusion schon enthalten**. (Man sehe die Äußerungen der Menschen auf der Ritter- und Schurkeninsel).

- **Analytisches Schließen** gelingt nur unter vereinbarten **normierten Bedingungen** bzw. in einem streng geregelten Argumentations-rahmen. (Vgl. Züge in einen geregelten Spiel bzw. die Aufgaben der Ritter- und Schurkeninsel.)

- Die **klassische Logik** stellt ein prominentes Beispiel der Verein-barung von strengen Regeln dar, die **analytische Schlüsse** erlauben.

Das Programm: Logik und Argumentation[1]

Logik erlaubt die Übersetzung natürlichsprachlicher (sozialwissenschaftlicher) Argumentationen in eine ausdrucksstarke formale Sprache und die Überprüfung dieser Argumentationen auf ihre logische Folgerichtigkeit in einem zu wählenden Argumentationsrahmen.

Die 4 Momente der logischen Argumentationsanalyse

1. Umformulierung, Paraphrasierung

Die **Umformulierung** der umgangssprachlichen Redeweise bzgl. der Prämissen und der Konklusion einer Argumentation in eine gedeutete, interpretierte umgangssprachliche Form (= **Paraphrasierung**) ist kein rein logisches Vorgehen.
Ausgangs- und Zielsatz werden (weitgehend) in der deutschen Sprache formuliert.

Bsp. Ausgangssatz: „Anton und Brigitte studieren Sozialwissenschaften."

Zielsatz: „Anton studiert Sozialwissenschaften und Brigitte studiert Sozialwissenschaften."

Ziel Aus der Konjunktion „und" zwischen zwei Namen (Subjekten) – „Anton"; „Brigitte" – wird ein „und" zwischen zwei Sätzen – „Anton studiert Sozialwissenschaften"; „Brigitte studiert Sozialwissenschaften".

[1] Vorlesung L2A: UL 20080417

2. Übersetzung, Symbolisierung, Formalisierung

Hier erfolgt die Zuordnung von Symbolen zu sprachlichen Ausdrücken. Insbesondere werden die (einfachen und zusammengesetzten) Sätze der Umgangssprache in Formeln einer geeigneten Logik übertragen. Es erfolgt eine Übersetzung der paraphrasierten umgangssprachlichen Form in eine Formel einer Logik.

Bsp. Es stehe das Symbol „p“ für den einfachen Satz „Anton studiert Sozialwissenschaften“ und das Symbol „q“ für den einfachen Satz „Brigitte studiert Sozialwissenschaften“. Schließlich übertragen wir das Wort „und“ in das kryptische Zeichen „$\wedge$“.

Ziel Es ergibt sich als Übersetzung: „$p \wedge q$“.

Der Ausgangssatz würde diese Zuordnung nicht erlauben.

3. Die Wahl eines Argumentations- bzw. Beweisrahmens

Der Nachweis der logischen Stringenz einer Argumentation (der Nachweis einer Begründung als analytischen Schluss) besteht darin, einen „zwingenden“ Weg von den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 1$) zu der Konklusion B angeben zu können. Wir benötigen z.B. „vernünftige“ (Schluss-)Regeln, die es erlauben, plausible Argumentationsschritte zu vollziehen. (Vgl. die Aufgaben der Ritter- und Schurkeninsel)

Die Wahl eines Argumentationsrahmens kann in wissenschaftlichen bzw. rationalen Argumentationsdiskursen mit der Wahl einer Logik zusammenfallen. (Vgl. die Wahl eines Spielrahmens, die sich in der Festlegung von Spielregeln manifestiert.)

4. Die „eigentliche“ Argumentation: Der Beweis

Die logische Stringenz einer Argumentation nachzuweisen besteht darin, einen zwingenden Weg von den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ ($n \geq 1$) zu der Konklusion B angeben zu können:

$$\frac{\text{Prämisse: } A}{\text{Konklusion: } B} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{1. Prämisse: } A_1 \\ \text{2. Prämisse: } A_2\end{array}}{\text{Konklusion: } B} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{1. Prämisse: } A_1 \\ \vdots \\ n\text{-te Prämisse: } A_n\end{array}}{\text{Konklusion: } B}$$

Der **Beweis** ist hierbei die Angabe des (schrittweisen) Nachweises der logischen Folgerichtigkeit/Gültigkeit der schematisierten, formalisierten Argumentation in einem vorgegebenen Argumentationsrahmen (einer Logik).

Beispiel:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Alle Menschen sind Lebewesen.} \\ \text{Alle Lebewesen sind sterblich.}\end{array}}{\text{Alle Menschen sind sterblich.}} \qquad \frac{\begin{array}{c}\text{Der Mensch ist sterblich.} \\ \text{Sokrates ist ein Mensch.}\end{array}}{\text{Sokrates ist sterblich.}}$$

Frage: Wie sieht die Symbolisierung/Formalisierung solcher Sätze wie “Sokrates ist ein Mensch”, “Der Mensch ist sterblich” bzw. “Alle Menschen sind sterblich” aus?

Schwierigkeit: Die grammatische Form der umgangssprachlichen (deutschen) Aussagesätze determiniert *nicht* die logische Form der Übersetzung!

Noch ein Beispiel:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Ein Bewohner der Ritter- und Schurkeninsel behauptet:} \\ \text{„Ich und meine Ehefrau sind Schurken.“}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Der Bewohner/Sprecher/Ehemann ist ein Schurke} \\ \text{und seine Ehefrau ist ein Ritter.}\end{array}}$$

Zur logischen Form einfacher Sätze[1]

1. Die traditionelle Analyse einfacher Sätze:

Der aristotelischen Analyse folgend wurden Sätze wie

- Alle Menschen sind Lebewesen.

lange Zeit als

- Menschen [alle sind] Lebewesen.

und damit als **dreigliedrige** Gebilde analysiert.
Es wurden 4 nichtmodale Kopula-Ausdrücke (Kopulae) unterschieden, um die Beziehung zwischen 2 Merkmalen/Begriffen auszudrücken. Die nachstehend hervorgehobenen Buchstaben **a**, **e**, **i** und **o** geben die traditionelle Symbolisierung/Formalisierung der 4 Kopula-Ausdrücke an:

(1) **a** [alle sind] (universell/allgemein bejahend)

(2) **e** [kein ist] (universell/allgemein verneinend)

(3) **i** [einige sind] (partikulär bejahend)

(4) **o** [einige sind nicht] (partikulär verneinend)

Solche Sätze galten als *einfache* Subjekt-Prädikatsätze (vor allem der Wissenschaftssprache). Soll nun der Satz

- Sokrates ist ein Lebewesen.

auf die gleiche Weise analysiert werden?

- Sokrates [alle sind] Lebewesen. bzw.
- Alle Sokrates(se) sind Lebewesen.??

[1]Vorlesung L2B: UL 20080417

oder

- Sokrates [einige sind] Lebewesen. bzw.
- Einige Sokrates(se) sind Lebewesen.??

Hier scheint der Kopula-Ausdruck "ist" weder universell noch partikulär zu sein.

Traditionell nennen wir denjenigen (Merkmals-)Begriff, der VOR der Kopula steht, **Subjekt(begriff)** und denjenigen Begriff, der NACH der Kopula steht, **Prädikat(begriff)**.

Übersetzen wir zunächst die Subjektausdrücke mit **S** und die Prädikatausdrücke mit **P**. Dann ergeben sich folgende Möglichkeiten:

Ausgangssatz:	(Alle) Menschen sind sterblich.
Umformulierung:	Menschen (alle sind) sterblich.
Übersetzung:	**S a P**
Ausgangssatz:	(Einige) Menschen sind gesund.
Umformulierung:	Menschen (einige sind) gesund.
Übersetzung:	**S i P**
Ausgangssatz:	Kein Mensch ist perfekt.
Umformulierung:	Menschen (kein ist) perfekt.
Übersetzung:	**S e P**
Ausgangssatz:	Einige Menschen sind nicht gesund.
Umformulierung:	Menschen (einige sind nicht) gesund.
Übersetzung:	**S o P**

Gemäß dieser Analyse ist die Basisform einfacher Sätze **dreigliedrig**: Die Annahme besteht darin, dass sich jeder einfache Satz in ein Subjekt, ein Prädikat und eine (komplexere) Kopula zerlegen lässt.

Probleme der Umformulierung/Paraphrasierung

Zumindest auf der Sicht der deutschen Sprache sperren sich eine ganze Reihe "einfacher" Sätze gegen eine solche Analyse:

- Sokrates ist sterblich.
- Anton liebt Beate.
- Anton schenkt Beate eine CD.
- Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.

Probleme der Abhängigkeit der Formalisierung/Schematisierung von der Umformulierung/Paraphrasierung

Problem 1

Fragen wir nach der Formalisierung/Schematisierung folgender Sätze:

(a) Alle Menschen sind sterblich.

(b) Menschen sind sterblich.

(c) Der Mensch ist sterblich.

Sind wir gewillt, die Sätze (b) und (c) im Sinne von (a) zu verstehen? Sagt unsere Intuiton, dass die Sätze (a), (b) und (c) "dasselbe bedeuten"? Wenn wir mit "ja" antworten, bleiben uns zwei Möglichkeiten:

M1 Wir paraphrasieren alle drei Sätze auf dieselbe Weise durch

Menschen [alle sind] sterblich.

Wir könnten hier auch noch den argumentativen Zwischenschritt einschieben und behaupten, dass wir (b) und (c) im Sinne von (a) verstehen und dann die Paraphrasierung von (a) verwenden.

M2 Wir sind der Meinung, dass diese Sätze zunächst verschieden übersetzt werden sollten, sich aber später – d.h. bzgl. eines Argumentationsrahmens, einer Logik – als **gleichbedeutend** (**logisch/beweisbar äquivalent**) erweisen.

Problem 2

Vergleichen wir die folgenden beiden Sätze:

(a) Menschen sind sterblich.

(b) Menschen sind gesund.

Beide Sätze weisen dieselbe sprachliche/**syntaktische** Struktur auf:

Subjekt **S** – Kopula "sind" – Prädikat **P**.

Natürlich sind die beiden Sätze wegen des inhatlichen Unterschieds von "sterblich" und "gesund" verschieden. Aber es gibt einen weiteren Unterschied, der offenbar an der Oberfläche nicht erscheint, aber auftaucht, sobald wir mit Blick auf die Formalisierung eine Umformulierung versuchen:

(a1) Alle Menschen sind sterblich. (! Solange wir keine Göttermenschen zulassen, klingt dies wie eine akzeptable Lesart.)

(a2) Einige Menschen sind sterblich. (!? Klingt eher wie eine Folgerung aus (a1).)

(b1) Alle Menschen sind gesund. (?? Ist natürlich eine mögliche Lesart, scheint aber falsch zu sein, wenn wir "alle" uneingeschränkt verwenden.)

(b2) Einige Menschen sind gesund. (! Deckt sich mit unserer ersten Intuition.)

Wenn wir also dem Satz (a) die Lesart (a1) und damit die Umformulierung "Menschen [alle sind] sterblich." zuweisen,lautet die logische Form dieses Satzes

S a P.

Dagegen werden wir dem Satz (b) eher die Lesart (b2) geben und damit auf die Umformulierung "Menschen [einige sind] gesund." abzielen. Selbst unter der Annahme, dass wir nun einen anderen Prädikatausdruck **P'** (= "gesund") betrachten, erhalten wir eine andere logische Form, da die Kopula zu **i** wird:

S i P'.

Der zunächst eizige sichtbare Unterschied zwischen (a) und (b) besteht hinsichtlich der Prädikatausdrücke "sterblich" und "gesund". Dies scheint zunächst ein rein **inhaltlicher** Unterschied zu sein. Die Umformulierung/Paraphrasierung zeigt aber, dass sich der Unterschied auch auf die (traditionelle) Kopula bezieht und somit eine **formale** Komponente besitzt.

Zur logischen Form einfacher Sätze[1]

2. Die moderne Analyse einfacher Sätze

Eine Basisidee der modernen Logik ist, bestimmte einfache Subjekt-Prädikatsätze wie

- Sokrates ist ein Mensch.
- Anton ist groß.
- Bernd faulenzt.

analog zu einstelligen Funktionen $f(x)$ bestehend aus einem (ungesättigten) Funktionsausdruck f ("...ist ein Mensch", "...ist groß", "...faulenzt" usw.) mit einem bestimmten (gesättigten) Argumentausdruck x ("Sokrates", "Anton" bzw. "Bernd" usw.) aufzufassen.

Eine Konsequenz dieses einflussreichen Vorschlags ist, **einfache Sätze** dieser Art nur noch als **zweigliedrige** Ausdrücke darzustellen:

- Sokrates — ist ein Mensch. Oder: (Sokrates) ist ein Mensch.

  (Vgl. mit dem traditionellen Versuch : Sokrates — ist — ein Mensch.??)
- Anton — ist groß. Oder: (Anton) ist groß.
- Bernd — faulenzt. Oder: (Bernd) faulenzt.

  (Anglisierend: Bernd — ist — faulenzend.??)

Redeweisen, die diese Gliederung unterstreichen, sind:
"Dem Subjekt *Anton* kommt die Eigenschaft *groß (zu sein)* zu."
"*Bernd* hat die Eigenschaft der *Faulheit*.

[1] Vorlesung L2C: UL 20080417

Ein wichtiger Unterschied zur traditionellen Analyse besteht darin, dass Kopula-Ausdrücke – wie z.B. “ist”, “sind” – direkter “Bestandteil” des Funktionsausdrucks werden und somit zum Prädikatausdruck hinzugezählt werden.

Beachte: In die moderne Paraphrasierung einfacher Sätze ist die klassische Funktion-Argument-Reihenfolge ($f(x)$) eingegangen: Der Subjektausdruck (Argumentausdruck) folgt auf den Prädikatausdruck (Funktionsausdruck):

- Ist ein Mensch (Sokrates).
- Ist groß (Anton).
- Faulenzt (Bernd).

Zur Formalisierung

Wir treffen die folgenden Vereinbarungen:

V1 Ausdrücke die in der Subjektposition von einfachen Sätzen stehen und die Aufgabe haben, genau ein Individuum / ein Objekt / einen Gegenstand zu bezeichnen, nennen wir **Eigennamen** (**Individuennamen**). Dies können sowohl Einwortausdrücke wie “Anton”, “Beate”, “Aristoteles” sein, als auch Konstruktionen, die mit einem bestimmten Artikel beginnen und auf die eine Singularkonstruktion folgt (**bestimmte/definite Kennzeichnungen**): “die Hauptstadt Deutschlands”, “der größte Planet unseres Sonnensystems” usw. Solche Konstruktion können recht komplex sein, z.B. Nebensätze einschließen: “Der Mann dort drüben, der gerade seinen Whisky trinkt”.

Gewisse Eigennamen (**Indikatoren**) hängen vom Kontext, z.B. vom Sprecher, ab:

- Anton sagt: „Meine Geburtsurkunde ist verschwunden.“
- Bernd sagt: „Meine Geburtsurkunde ist verschwunden.“

- Christine sagt: „Meine Geburtsurkunde ist verschwunden.“

  Das Individuum, das Objekt – die jeweilige Geburtsurkunde – ist in der Regel jedesmal ein anderes.

V2 Eigennamen werden direkt durch die Verwendung einfacher (atomarer) Symbole übersetzt, wobei wir vornehmlich **kleine Buchstaben des Anfangs des deutschen Alphabets** verwenden werden.

V3 Diese Buchstaben bilden eine eigenständige **syntaktische Kategorie** und wir wollen sie **Individuenkonstanten** nennen.

Eigenname:	Anton	Beate	die (bestimmte) CD
Individuenkonstante:	a	b	c

V4 Prädikatausdrücke mit einer bestimmten Interpretation wollen wir mittels großer Buchstaben des deutschen Alphabets – beginnend mit F – formalisieren.

V5 Auch diese Ausdrücke bilden eine eigenständige syntaktische Kategorie, die wir **Prädikatenkonstanten** nennen.

V6 Die fehlende Argumentstelle (Subjektstelle) zeigen wir zuweilen durch Punkte ... an: $F\ldots$ (Manchmal erfolgt diese Angabe auch durch bloße (leere) Klammerung: $F()$.)

Prädikatausdruck:	faulenzt	ist groß
Prädikatkonstante:	$F\ldots$	$G\ldots$

Typen einfacher Sätze

Wir können im Rahmen einer umgangssprachlichen Argumentation verschiedene einfache Satztypen unterscheiden, die unterschiedlich paraphrasiert und somit auch formalisiert werden können:

(1) Einfache einargumentige Sätze

Der Satz "Bernd faulenzt." kann als ganzer Satz einfach mittels eines Buchstabens p als einfacher, nicht weiter zergliederbarer Satz aufgefasst oder in einen einstelligen Funktionsausdruck $F\ldots$ gefolgt von einem Argumentausdruck b zergliedert dargestellt werden:

Ausgangsausdrücke:	Bernd	...faulenzt	Faulenzt (Bernd)
Formalisierung:	b	$F\ldots$	$F(b)$ bzw. Fb

(2) Einfache zweiargumentige Sätze

Ein großer Vorteil der modernen Satzanalyse gegenüber der traditionellen Vorgehensweise ist, dass problemlos auch Sätze formalisiert werden können, die mehrere Subjekte (Argumente) enthalten. Dabei werden Satzbestandteile, die in der Grammatik häufig als Objekte angesehen werden, als **logische Subjekte** aufgefasst. Der Satz

- Anton ist größer als Bernd.

kann als ganzer Satz ebenfalls einfach mittels eines Buchstabens q als einfacher, nicht weiter zergliederbarer Satz aufgefasst oder in einen zweistelligen Funktionsausdruck G gefolgt von zwei Argumentausdrücken a und b [Ist-größer-als(Anton,Bernd) bzw. Gab] zergliedert dargestellt werden:

Anton	Bernd	...ist größer als ...	Anton ist größer als Bernd,
a	b	$G\ldots\ \ldots$	$G(a,b)$ bzw. Gab.

(3) Einfache dreiargumentige Sätze

Es gibt im Deutschen einige Verben, die so gelesen werden können, dass sie drei Argumentstellen besitzen:

- "graben" ($G \ldots \ldots \ldots$): Wer anderen eine Grube gräbt, fällt selbst hinein (x gräbt y für z).
- "schenken" ($S \ldots \ldots \ldots$): Anton schenkt Bernd die (bestimmte) CD.

Anton	Bernd	die (bestimmte) CD	...schenkt ... ...
a	b	c	$S \ldots \ldots \ldots$

Anton schenk Bernd die (bestimmte) CD
$S(a, b, c)$ bzw. $Sabc$.

(4) n-argumentige Sätze

Im Prinzip lassen sich auch noch höherstellige Prädikatausdrücke (z.B. Verben mit mehr als drei Argumentstellen) auf diese Weise darstellen. Die deutsche Umgangssprache scheint dafür allerdings keinen Anlass zu bieten!?
Dagegen werden solche Prädikate in den Wissenschaften dennoch verwendet, da das Sprechen über komplexe Zusammenhänge dieses Vorgehen erzwingen kann.
Nehmen wir an, dass jemand der Meinung ist, dass sich das Verb *wissen* auf einen Wissenden a, den gewussten Satz p, eine Hintergrundtheorie h und ein Zeitintervall bestehend aus t_1 und t_2 bezieht. Dann ist er möglicherweise bereit, folgende gestelzte Fassung zu akzeptieren:

- a weiß im Zeitinervall t_1, t_2 bezüglich einer Hintergrundtheorie h, dass p wahr ist.
- $W(a, t_1, t_2, h, p)$ bzw. Wat_1t_2hp.

Nach dieser Lesart wäre "wissen" fünfstellig!

Die Übersetzbarkeit selbstbezüglicher (reflexiver) Satzgebilde

Einen speziellen Fall stellen im Deutschen selbstbezügliche (reflexive) Konstruktionen dar, was sich u.a. in der Verwendung des Reflexivpronomens "sich" äußert.
Ist also ein Satz wie

- Anton liebt sich.

gemäß unserer bisherigen Angaben ein **einfacher** Satz? Oder benötigen wir weitere formale Mittel zur Analyse dieses dann **komplex** aufgefassten Satzes – zum Beispiel die Identität von Anton mit sich?
Diese Frage lässt sich – wie alle Übersetzungsfragen – **nicht innerlogisch** klären!
Vergleichen Sie die beiden Paraphrasen:

(a) Anton liebt Anton.

(b) Anton liebt einen Menschen und der ist Anton.

Die erste Paraphrase (a) können wir leicht mittels

$L(a, a)$ bzw. Laa wiedergeben.

D.h., die Selbstbezüglichkeit **kann** dadurch erfasst werden, dass wir an den beiden zur Verfügung stehenden Argumentpositionen dieselbe Individuenkonstante (IK) verwenden.

Im Fortgang werden wir sprachliche Mittel einführen, die es erlauben die Variante (b) noch weiter zu paraphrasieren:

(b*) Es gibt jemanden, der von Anton geliebt wird und dieser (Jemand) ist mit Anton identisch.

Die Übersetzung davon könnte dann wie folgt aussehen:

$$\exists x(Lax \land x = a).$$

Beachte: Es kommt in vielen Fällen auf die Reihenfolge der Argumentstellen an!

Zur logischen Form komplexer Sätze[1]

(1) Einfache (positive) allquantifizierte Sätze:

Im Unterschied zur traditionellen Analyse (**S a P**) erfolgt die Formalisierung von “(Alle) Menschen sind sterblich” über eine ganze Reihe von Umformulierungsschritten mit einem recht komplexen Endergebnis:

(a) (Alle) Menschen sind sterblich.

Gemäß der modernen Analyse einfacher Sätze stecken in diesem Satz zwei einstellige Prädikatenkonstanten

— ... ist Mensch: M ... und

—... ist sterblich: S ...

Die Lesart “Sterblich(alle Menschen) erscheint ungeeignet, da der Ausdruck “alle Menschen” nicht als **Eigenname** in Frage kommt: Er bezeichnet nicht einen Gegenstand, sondern beliebig viele.

Dieser Satz verfügt demnach weder in der Subjekt- noch in der Prädikatposition über Eigennamen. Der Ausweg besteht darin, statt über konkrete Individuen/Gegenstände über “angedeutete” (variable) Individuen/Gegenstände zu sprechen:

(b) Für alle Individuen (Gegenstände) gilt: Wenn das (jeweilige) Individuum (ein) Mensch ist, (dann) ist es (das jeweilige Individuum) sterblich.

An dieser Formulierung fällt auf, dass der Ausgangssatz nun in gewisser Weise als **komplexer Satz** paraphrasiert wird. Dies wird angezeigt durch die Verwendung von “wenn . . . , dann . . .

[1] Vorlesung L3: UL 20080424

Die Formulierung in (b) sichert, dass wir immer von demselben Individuum sprechen. Wir greifen irgendein Individuum heraus, prüfen zunächst, ob es ein Mensch ist und prüfen im positiven Fall weiter, ob es **unter dieser Bedingung/Voraussetzung** desweiteren sterblich ist.

Die alternative Formulierung

(b') Wenn alle Individuen (Gegenstände) Menschen sind, (dann) sind alle Individuem sterblich.

leistet diese (anaphorische) Beziehung nicht. Diese Formulierung wäre unter den beiden Bedingungen (i) Es gibt Göttermenschen (Menschen, die unsterblich sind) und (ii) Es gibt Tiere (Gegenstände, die keine Menschen sind) wahr. Unsere ursprüngliche Formulierung (b) wäre schon wegen (i) widerlegt: Es gäbe einen (Gott-)Menschen, der nicht sterblich ist. Also wären nicht alle Menschen sterblich.

Einen Schritt zur Formalisierung stellt die Symbolisierung unserer Sprechweise über Individuen dar:

(c) Für alle Individuen **i** gilt: Wenn **i** Mensch ist, dann ist **i** sterblich.

Die Verwendung desselben Symbols **i** zeigt an, dass immer von demselben Individuum die Rede ist.

Dieses Individuum **i** ist nun immer ein bestimmtes, für das wir keinen Namen haben. Aber dieses Individuum nimmt nun stets die Argumentstelle der beiden Prädikate "...ist Mensch" und "...ist sterblich" ein: Mensch(**i**) bzw. sterblich(**i**)

(d) Für alle **i** gilt: Wenn Mensch(**i**), dann sterblich(**i**).

Um nun eine Formalisierung vornehmen zu können, benötigen wir neue Symbole für

– den Ausdruck (**Quantor**) "für alle"

– die nicht unmittelbar benannten Individuen **i** und

– den Satzverknüpfer (**Konnektor**) "wenn ..., (dann) ...":

- "für alle" $\Longleftrightarrow \forall$:

  Der Quantorausdruck "für alle" wird durch das Quantorsymbol "$\forall$" (**Allquantor**) symbolisiert.

- **i** $\Longleftrightarrow x$:

  Die Individuen können nun nicht mehr durch **Individuenkonstanten** dargstellt werden. Wir müssen **Individuenvariablen** wie $x, y, z, x_1, \ldots$ verwenden. D.h. die Formalisierung erfolgt durch kleine Buchstaben des deutschen Alphabets beginnend bei x.

- $\forall x$

  Der Quantor "$\forall$" muss sich immer auf variable Namen (Individuenvariablen) beziehen. Die Kombination aus Quantor und Individuenkonstante – $\forall a$ / z.B. "alle gegenwärtigen Hauptstädte Deutschlands" – macht keinen Sinn.

- "wenn ..., (dann) ..." $\Longleftrightarrow \supset$.

  Das Hufeisen "$\supset$" ist ein **Funktor/Konnektor/Junktor**, der die Aufgabe hat, zwei Formeln, die Sätze (z.B. Ma, $Sabc$) bzw. Formen von Sätzen (z.B. Mx, $Saxc$) repräsentieren, wieder zu einem neuen **komplexeren** Satz zu verknüpfen (z.B: $(Ma \supset Sabc)$: Wenn A und B irgendwelche Übersetzungen – zwei Formeln – sind (z.B. Mx und Sx), dann ist der Ausdruck / die neue Formel $(A \supset B)$ die Übersetzung des komplexeren Satzes "Wenn A, dann B.

Damit können wir den Satz

(a) (Alle) Menschen sind sterblich.

zunächst paraphrasieren als

(d) Für alle **i** gilt: Wenn Mensch(**i**), dann sterblich(**i**).

und schließlich formalisieren als

(e) $\forall x(Mx \supset Sx)$. Vergleichen wir (d) mit (e):

Für alle	**i** gilt:	Wenn Mensch	(**i**),	dann	sterblich	(**i**)
$\forall$	x	$(M$	x	$\supset$	S	$x)$.

Die Klammerung um $Mx \supset Sx$ wird unbedingt benötigt, um anzuzeigen, dass das x in jedem betrachteten Falle für ein- und dasselbe Individuum steht. Die Formel $\forall x Mx \supset Sx$ würde das dritte Vorkommen von "x" außerhalb des Wirkungsbereiches des Allquantors "$\forall$" lassen. Dass wir in "Sx" erneut den Buchstaben "x" verwenden, sichert allein nicht, dass wir wieder dasselbe Individuum betrachten müssen!

- **Formalisierung (Zusammenfassung)**: $\forall x(Mx \supset Sx)$, wobei

— "$\forall x \ldots$" für "Für alle x gilt ..." steht, worin "x" eine sogenannte Individuenvariable ist, die für beliebige Individuen/Gegenstände steht (die über den uneingeschränkten Individuenbereich läuft),

— "$\supset$" die aussagenlogische Verknüpfung "wenn ..., dann ..." repräsentiert (**materiale Implikation**, die hier zur **formalen Implikation** wird, da sie im Wirkungsbereich des Allquantors $\forall$ steht),

— "Mx" bzw. "$M(x)$" für "x ist Mensch" und

— "Sx" bzw. "$S(x)$" für "x ist sterblich" steht.

Kurzer Vergleich mit der traditionellen Variante

(a) (Alle) Menschen sind sterblich Ausgangssatz

Die Frage war: Wie ist dieser Satz zu formalisieren?

Eine damit verbundene Frage war: Ist dieser Satz ein **einfacher** oder **zusammengesetzter/komplexer** Satz, der aus mehreren Teilsätzen besteht.

Der traditionelle Paraphrasierungsvorschlag war:

(a_1*) Menschen [alle sind] sterblich.

Die traditionelle Formalisierung lautete

(a_{1F}) **M a S**

Der moderne Vorschlag der Paraphrasierung lautete

(a_2*) Für alle **i** gilt: Wenn Mensch(**i**), dann sterblich(**i**)

Daraus ergab sich die folgende Übersetzung:

(a_2F) $\forall x(Mx \supset Sx)$. (= (e))

- Gemäß der traditionellen Auffassung ist die Kopula durch ein einfaches Zeichen (a,e,i,o) zu erfassen, obwohl die Kopula nicht nur aus einem Hilfswerb ("ist", "sind" etc.) besteht, sondern auch quantifizierende ("alle", "einige") und polarisierende (bejahende, veneinende) Eigenheiten aufweist.
- Gemäß der modernen Auffassung reduziert sich die Kopula auf die Funktionen des Hilfsverbs, die unmittelbar durch die Prädikation erfasst werden und somit keine eigenständige Symbolisierung erhalten.
- Die Quantifizierungseigenschaften (z.B. von "alle") werden durch Quantoren (z.B. "$\forall$") erfasst, die sich auf Individuenvariablen ("x") beziehen (z.B. "$\forall x$").
- Die Eigenschaft der Verneinung wird später ebenfalls durch eigene Symbole erfasst.

Zur logischen Form komplexer Sätze[1]

(2) Einfache (positive) existenzquantifizierte Sätze:

Ebenfalls im Unterschied zur traditionellen Analyse (**S i P**) erfolgt die Formalisierung von "Einige (Manche Menschen sind gesund" über eine ganze Reihe von Umformulierungsschritten mit einem recht komplexen Endergebnis:

(a) Einige (Manche) Menschen sind gesund.

Wieder stecken in diesem Satz zwei einstellige Prädikatkonstanten

... ist Mensch: M ... und

... ist gesund: G ...

Die Lesart "Gesund(einige Menschen) erscheint ungeeignet, da auch der Ausdruck "einige Menschen" nicht als **Eigenname** in Frage kommt: Er bezeichnet nicht einen Gegenstand, sondern möglicherweise mehrere oder (bei einer Untertreibung) sogar alle Menschen: "Einige Menschen sind sterblich".

Auch dieser Satz verfügt demnach weder in der Subjekt- noch in der Prädikatposition über Eigennamen. Der Ausweg besteht wiederum darin, statt über konkrete Individuen/Gegenstände über "angedeutete" (variable) Individuen/Gegenstände zu sprechen. Allerdings liegt nun keine hypothetische Behauptung vor:

(b) **Für mindestens ein** Individuum (Gegenstand) gilt: das (jeweilige) Individuum ist (ein) Mensch und es (das jeweilige Individuum) ist gesund.

Beachte: Eine Existenzbehauptung wie "Mindestens ein Mensch ist gesund" behauptet das gleichzeitige Zutreffen zweier Eigenschaften / einstelliger (einargumentiger) Prädikate ("... ist

[1] Vorlesung L3B: UL 20080424

Mensch + ... ist gesund) auf ein Individuum.

Wiederum fällt auf, dass der Ausgangssatz nun in gewisser Weise als **komplexer Satz** paraphrasiert wird. Dies wird angezeigt durch die Verwendung der Konjunktion "... und ... Wiederum müssen wir immer von demselben Individuum sprechen. Wir greifen irgendein Individuum heraus und prüfen, ob es ein Mensch ist und **zusätzlich** prüfen wir, ob es **auch** gesund ist. Finden wir ein solches Individuum, so ist der Satz **wahr**.

Die alternative Formulierung

(b') Mindestens ein Individuum (Gegenstand) ist Mensch und mindestens ein Individuum (Gegenstand) ist gesund.

leistet diese (anaphorische) Beziehung nicht. Diese Formulierung wäre unter den beiden Bedingungen

(i) Anton ist ein Mensch (und krank).

und

(ii) Antons Hamster ist gesund (und kein Mensch).

wahr.

Einen Schritt zur Formalisierung stellt erneut die Symbolisierung unserer Sprechweise über Individuen dar:

(c) Für mindestens ein Individuum **i** gilt: **i** ist Mensch und **i** ist gesund.

Dieses Individuum **i** ist immer ein bestimmtes, für das wir keinen Namen haben. Aber dieses Individuum nimmt nun stets die Argumentstelle der beiden Prädikate "...ist Mensch" und "...ist gesund" ein: Mensch(**i**) bzw. gesund(**i**)

(d) Für mindestens ein **i** gilt: Mensch(**i**) und gesund(**i**).

Um nun eine Formalisierung vornehmen zu können, benötigen wir weitere neue Symbole für

– den Ausdruck (**Quantor**) "für mindestens ein" und

– den Satzverknüpfer (**Konnektor: Konjunktion**) "... und ...":

- "für mindestens ein" $\Longleftrightarrow$ $\exists$:

  Der Quantorausdruck "für mindestens ein" wird durch das Quantorsymbol "$\exists$" (**Existenzquantor**) symbolisiert.

- $\exists x$

  Der Quantor "$\exists$" muss sich immer auf variable Namen (Individuenvariablen) beziehen. Die Kombination aus Quantor und Individuenkonstante – $\exists a$ / z.B. "mindestens eine gegenwärtige Hauptstadt Deutschlands" – macht keinen Sinn.

- "...und ..." $\Longleftrightarrow$ $\wedge$.

  Das Dach "$\wedge$" ist wie "$\supset$" ein **Funktor/Konnektor/Junktor**, der die Aufgabe hat, zwei Formeln, die Sätze (z.B. Ma, $Sabc$) bzw. Formen von Sätzen (z.B. Mx, $Saxc$) repräsentieren, wieder zu einem neuen **komplexeren** Satz zu verknüpfen (z.B: $(Ma \wedge Sabc)$): Wenn A und B irgendwelche Übersetzungen – zwei Formeln – sind (z.B. Mx und Gx), dann ist der Ausdruck / die neue Formel $(A \wedge B)$ die Übersetzung des komplexeren Satzes "A und B".

  Damit können wir den Satz

(a) Einige Menschen sind gesund.

zunächst paraphrasieren als

(d) Für mindestens ein **i** gilt: Mensch(**i**) und gesund(**i**).

und schließlich formalisieren als

(e) $\exists x(Mx \wedge Gx)$. Vergleichen wir (d) mit (e):

Für mind. ein	**i** gilt:	Mensch	(**i**)	∧	gesund	(**i**)
$\exists$	x	$(M$	x	$\wedge$	G	$x)$.

Die Klammerung um $Mx \wedge Gx$ wird unbedingt benötigt, um anzuzeigen, dass das x in jedem betrachteten Falle für ein- und dasselbe Individuum steht. Die Formel $\exists x Mx \wedge Gx$ würde das dritte Vorkommen von "x" außerhalb des Wirkungsbereiches des Existenzquantors "$\exists$" lassen. (Man sagt auch: x **kommt frei vor.**) Dass wir in "Gx" erneut den Buchstaben "x" verwenden, sichert allein nicht, dass wir wieder dasselbe Individuum betrachten müssen! Die Lesart von $\exists x Mx \wedge Gx$ wäre: "Es gibt mindestens einen Menschen und irgendetwas, was gesund ist."

- **Formalisierung (Zusammenfassung)**: $\exists x(Mx \wedge Gx)$, wobei

— "$\exists x \ldots$" für "Für mindestens ein x gilt …" steht, worin "x" eine sogenannte Individuenvariable ist, die für beliebige Individuen/Gegenstände steht (die über den uneingeschränkten Individuenbereich läuft),

— "$\wedge$" die aussagenlogische Verknüpfung "… und …" repräsentiert (**klassische Konjunktion**),

— "Mx" bzw. "$M(x)$" für "x ist Mensch" und

— "Gx" bzw. "$G(x)$" für "x ist gesund" steht.

Zur logischen Form komplexer Sätze[1]

(3) Einfache negierte/verneinte quantifizierte Sätze:

Mit Blick auf die traditionelle Analyse bleibt uns nun Sätze der Formen **S e P** (allgemein verneinend) und **S o P** (partikulär verneinend) zu paraphrasieren und zu formalisieren:

(a) Kein Mensch ist allmächtig. **S e P**

(b) Manche Menschen sind nicht gesund. **S o P**

Beide Sätze enthalten Verneinungsausdrücke: "kein" in (a) und "nicht" in (b). Da im Unterschied zur traditionellen Analyse Negations- bzw. Verneinungsausdrücke nicht Bestandteil der Kopula sein können, benötigen wir eine Negation, die sich sowohl auf einfache Prädikatformeln der Art Fa, Gab, $Haxc$ usw. als auch auf komplexe Formeln der Art $(A \wedge B)$, $(A \supset B)$, $\forall x(Fx \supset Gx)$ usw. beziehen kann. Diese **klassische** Art der Negation wollen wir **Satznegation** nennen.

$\neg$ Dieses Zeichen wollen wir für die Satznegation verwenden. Wenn wir eine korrekte (Teil-)Übersetzung A gebildet haben, können wir diese auch als Ganzes verneinen/bestreiten/zurückweisen: $\neg A$.

- Anlass zu Satznegationen können eine ganze Reihe sprachlicher Ausdrücke geben: "nicht", "es ist nicht der Fall, dass", "un–" (Vorsilbe), "kein", "niemand", "nirgends", "nie", "nimmer" (inkorporiert) usw.
- Andere interessante Fälle sind "vergessen" (= "nicht mithaben"), "widerlegen", "entgegnen", "zurückweisen" usw.
- Manchmal neigen wir auch dazu, bestimmte Prädikate als die Verneinung eines anderen Prädikats aufzufassen: "gesund" (= "nicht-krank") versus "krank" (= "nicht-gesund"), "schön"

[1] Vorlesung L4A: UL 20080508

versus “hässlich” etc. Doch auch hier entscheidet der Interpret und Übersetzer. Man sehe “schön” versus “unschön”.

- Schließlich gibt es eine Vielzahl von Verneinungen in deutschen Sätzen, die sich dagegen sperren als Satznegation aufgefasst zu werden. Sie beziehen sich eher auf Satzteile und verlangen z.T. nach einer “sondern”-Fortsetzung bzw. nach einer bestimmten Betonung:

(c) Nicht zu Hause vergaß Anton seinen Schlüssel.

(d) Zu Hause liegt Antons Schlüssel nicht.

Zurück zu Satz (a)

(a) Kein Mensch ist allmächtig.

Es bieten sich nun zwei verschiedene Paraphrasen an:

(a1) Es gibt kein **i**: **i** ist Mensch und **i** ist allmächtig.

bzw.

(a2) Für alle **i** gilt: Wenn **i** ein Mensch ist, dann ist **i** nicht allmächtig.

Beide Varianten können wir mit den zur Verfügung stehenden Mitteln unter Einschluss der klassischen Negation übersetzen (“$H \ldots$” steht für “… allmächtig”):

(Üa1) $\neg\exists x(Mx \wedge Hx)$

(Üa2) $\forall x(Mx \supset \neg Hx)$

Der Beispielsatz

(b) Manche Menschen sind nicht gesund.

wird paraphrasiert als

(b*) Für mindestens ein **i**: **i** ist Mensch und **i** ist nicht gesund.

Die Übersetzung davon lautet dann:

(Üb*) $\exists x(Mx \wedge \neg Gx)$

Fassen wir die Darstellung der 4 Satzformen zusammen:

Alle S sind P	**S a P**	$\forall x(Sx \supset Px)$	$\neg\exists x(Sx \wedge \neg Px)$
Einige S sind P	**S i P**	$\exists x(Sx \wedge Px)$	$\neg\forall x(Sx \supset \neg Px)$
Kein S ist P	**S e P**	$\forall x(Sx \supset \neg Px)$	$\neg\exists x(Sx \wedge Px)$
Einige S sind nicht P	**S o P**	$\exists x(Sx \wedge \neg Px)$	$\neg\forall x(Sx \supset Px)$

Wir haben schon im Fall **S e P** (Beispiel (a)) behauptet, dass es zwei Lesarten gibt, die zu zwei syntaktisch unterschiedenen Übersetzungen führen. Später werden wir **beweisen**, dass diese beiden Übersetzungen logisch gleichwertig sind ("dasselbe besagen").

Die letzte Spalte zeigt an, dass es auch für die anderen drei Fälle jeweils zumindest eine weitere Übersetzungsmöglichkeit gibt von der später ihre logische Gleichwertigkeit mit der in Spalte 3 genannten gezeigt werden kann.

(4) Weitere Fälle und neue Übersetzungsmittel

Gegeben seien folgende Interpretationen:

$V \ldots \ldots$ = ... ist Vater von ...

$M \ldots \ldots$ = ... ist Mutter von ...

a : Anton

Wir wollen nun den Satz

(e) Anton ist Großvater.

übersetzen. Ein mögliche und sinnvolle Paraphrase wäre:

(e*) Es gibt mindestens einen Menschen, von dem Anton Vater ist und dieser Mensch ist Vater bzw. (oder) Mutter von mindestens einem weiteren Menschen.

Kürzer: Großväter sind Väter von Vätern (Großväter väterlicherseits) oder Väter von Müttern (Großväter mütterlicherseits).

Zur Übersetzung fehlt uns nur ein Symbol für den deutschen Konnektor "oder", der einschließende ("Mindestens einer von uns beiden ist Ritter.") bzw. ausschließende Alternativen ("Genau einer von uns beiden ist Ritter.") angibt:

$\vee$ Wir verwenden das umgekehrte Dach "$\vee$" als Übersetzung des deutschen Satzverknüpfers "oder". Wir werden es mit der **einschließenden Lesart** intepretieren. D.h. der Fall, dass beides zutrifft, ist zulässig.

(Üe*) $\exists x(Vax \wedge \exists y(Vxy \vee Mxy))$.

Bemerkung: Die einschließende Lesart wird eher aus biologischen denn aus logischen Gründen ausgeschlossen. Allerdings lässt sich der ausschließende Fall "entweder Mutter oder Vater" ebenfalls ausdrücken. **Aufgabe!**

Disambiguierung durch Umformulierung/Paraphrasierung und Übersetzung/Formalisierung[1]

Beispielsatz:	Jeder Mann liebt eine Frau.
Umformulierung 1:	Zu jedem Mann gibt es (mindestens) eine Frau, die er liebt.
	[Jeder Mann liebt irgendeine Frau]
Übersetzung 1:	$\forall x(Mx \supset \exists y(Fy \wedge Lxy))$
Umformulierung 2:	Es gibt (mindestens) eine Frau, die von jedem Mann geliebt wird. [**Hutkontur**]
	[Jeder Mann liebt eine bestimmte Frau.]
Schematisierung 2:	$\exists y(Fy \wedge \forall x(Mx \supset Lxy))$

Syntax der klassischen Logik (Übersetzung / Formalisierung)

Grundzeichen [GZ]

(1) $p, q, r, s, p_1, \ldots$	Aussagenvariablen [AV]
(2) $a, b, c, a_1, \ldots$	Individuenkonstanten [IK]
(3) $x, y, z, x_1, \ldots$	Individuenvariablen [IV]
(4) $F^1, G^1, H^1, F^1_1, \ldots, F^2, G^2, H^2, F^2_1, \ldots$	unendliche Liste 1-stelliger, 2-stelliger etc. Prädikatkonstanten [PK]
(5) $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv,$	klassische Funktoren
(6) $\forall, \exists$	Quantoren [Q]
(7) ( )	Klammern

[1] Vorlesung L4B: UL 20080508

Metavariablen [MV]:

(1) P bzw. P_i — MV für Aussagenvariablen

(2) Φ^n bzw. Φ^n_j — MV für n-stellige Funktoren

(3) A, B, C, D, A_1, ... — MV für Formeln

(4) $\mathbf{f}$ bzw. $\mathbf{f}^n$ — MV für Prädikatkonstanten

(5) $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ ... — MV für Individuenausdrücke (Individuenvariablen bzw. -konstanten)

Formregeln / Formeldefinition

(1) Eine allein stehende Aussagenvariable ist eine Formel.

(2) Wenn $\mathbf{f}$ eine n-stellige Prädikatenvariable und wenn $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$, ..., $\mathbf{i_n}$ Individuenvariablen oder Individuenkonstanten (nicht notwendigerweise alle verschieden) sind, dann ist auch $\mathbf{f}\ \mathbf{i_1}\mathbf{i_2}\ldots\mathbf{i_n}$ eine Formel.

(3) Wenn A und B Formeln sind, dann sind auch $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ Formeln.

(4) Wenn A eine Formel und $\mathbf{i}$ eine Individuenvariable ist, dann sind $\forall \mathbf{i} A$ und $\exists \mathbf{i} A$ Formeln.

(5) A ist eine Formel gdw dies aufgrund der Formregeln (1)–(4) der Fall ist.

Klammereinsparung:

(1) Das äußere Klammernpaar kann weggelassen werden.

(2) Ein Klammernpaar kann weggelassen werden, wenn die Funktoren innerhalb dieses Klammernpaares **stärker binden**, als die Funktoren, die die geklammerte Zeichenreihe (diese Teilformel) zu komplexeren Zeichenreihen (Teilformeln) verknüpfen:

$\wedge$ bindet stärker als $\vee$, $\supset$, $\equiv$;

$\vee$ bindet stärker als $\supset$, $\equiv$;

$\supset$ bindet stärker als $\equiv$;

Begrenzte und unbegrenzte Schreibweise

Kx: x ist Körper

Sx: x ist schwer (x hat Schwere)

Beispielsätze:
— Alle Körper sind schwer.
— Einige Körper sind schwer.

- **begrenzte Schreibweise: Grundbereich eingeschränkt**:

⇒ Grundbereich = Menge aller Körper

— $\forall x Sx$

— $\exists x Sx$

- **unbegrenzte Schreibweise: Grundbereich beliebig**

⇒ Grundbereich = Menge aller „Entitäten“, Individuen

— $\forall x(Kx \supset Sx)$

— $\exists x(Kx \wedge Sx)$

Wirkungsbereich (Skopus) eines Quantors $\forall \mathbf{i}$ bzw. $\exists \mathbf{i}$ nennen wir die unmittelbar auf $\forall \mathbf{i}$ bzw. $\exists \mathbf{i}$ folgende Formel.

Wir sagen, eine IV **i kommt** in einer Formel A **gebunden vor**, wenn sie unmittelbar auf $\forall$ oder $\exists$ folgt oder wenn sie im Wirkungsbereich von $\forall \mathbf{i}$ bzw. $\exists \mathbf{i}$ vorkommt.

Wir sagen, eine IV **i kommt** in einer Formel A **frei vor**, wenn **i** in A vorkommt und nicht gebunden ist.

So kommt die Variable x in den Formeln

$$\forall x F x$$

$$\forall x F x, y$$

$$\forall x (p \supset F x)$$

gebunden und in den Formeln

$$F x$$

$$F x, y$$

$$\forall y (p \supset F x)$$

frei vor. In der Formel

$$F x \supset \forall x \neg (p \supset G a, x)$$

ist das erste Vorkommen von x ein **freies** und das zweite und dritte Vorkommen von x sind **gebundene** Vorkommen.

Eine **Aussageform** ist jede Formel A, die mindestens ein freies Vorkommen einer IV in A hat.
Solch ein Ausdruck kann *nicht mit wahr bzw. falsch* bewertet werden.

Eine **Aussage** ist jede Formel A, in der alle Vorkommen von IV gebundene Vorkommen sind. Ein Spezialfall ist eine Formel, die keine IV enthält.
Solch ein Ausdruck kann *mit wahr bzw. falsch* bewertet werden.

Sprachtypen

Umgangssprache	Name des Funktors	Funktor	Name der Funktion
nicht	non	$\neg$ ($\sim$)	Negation (Verneinung)
und	et	$\wedge$ (&)	Konjunktion
oder	vel	$\vee$	Alternative (Disjunktion, Adjunktion)
wenn, dann	seq	$\supset$ ($\rightarrow$)	Implikation (Subjunktion)
genau dann, wenn	äq	$\equiv$ ($\leftrightarrow$)	Äquivalenz (Bisubjunktion)

Ausdrucksmöglichkeiten für andere Satzverknüpfer (Konnektoren)

entweder p oder q	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
	$\neg p \equiv q$ / $\neg(p \equiv q)$ / $p \equiv \neg q$
weder p noch q	$\neg p \wedge \neg q$
nicht p, sondern q	$\neg p \wedge q$
p statt dass q	$p \wedge \neg q$
p ohne dass q	$p \wedge \neg q$

Semantik der klassischen Logik[1]

Modelle: Rahmenbedingungen

- **Individuenkonstanten** (**Namenbuchstaben**) beziehen sich auf bestimmte Werte des Wertebereichs.
- **Prädikatenkonstanten** (**Prädikatbuchstaben**) bilden zusammen mit den durch die Individuenkonstanten (Namenbuchstaben) oder Variablen besetzten Argumentstellen Prädikate, die Begriffe ausdrücken.
- Der **Quantor** $\forall$ bezieht sich auf alle Werte eines vorgegebenen (eingeschränkten bzw. nicht-eingeschränkten) Wertebereichs.
- Der **Quantor** $\exists$ bezieht sich auf mindestens einen Wert eines vorgegebenen Wertebereichs.

Belegungen

- Aussagenvariablen (AV) werden mit **Wahrheitswerten** belegt.

Feststellungen über **Aussagesätze** (künftig kurz auch „Aussagen" bzw. „Sätze"):

(1) Aussagesätze bezeichnen Sachverhalte

(2) Einen Aussagesatz nennen wir „**wahr**" (**1**) **g**enau **d**ann, **w**enn [Abkürzung: **gdw** (englisch: **iff** für **if** and only **if**)] der durch ihn bezeichnete Sachverhalt besteht (eine Tatsache ist). Andernfalls nennen wir den Aussagesatz „**falsch**" (**0**).

[Korrespondenztheorie der Wahrheit resp. Kohärenztheorie der Wahrheit]

p	$\neg p$
1	0
0	1

p,q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \equiv q$	$p \wedge \neg q$
1,1	1	1	1	1	0	0	0	0
1,0	0	1	0	0	0	0	1	1
0,1	0	1	1	0	0	1	1	0
0,0	0	0	1	1	1	0	0	0

[1] Vorlesung L5: UL 20080522

- Eine Individuenkonstante (IK) ist innerhalb einer Interpretation *mit einem und nur einem* Wert aus I zu belegen.

  (Verbot nichtbezeichnender Namen + Verbot von Mehrfachbezeichnungen!)

  Allerdings können zwei IK innerhalb derselben Interpretation denselben Wert zugeordnet bekommen.

  Auch kann eine IK in unterschiedlichen Interpretationen unterschiedliche Werte zugeordnet bekommen.

- Individuenvariablen (IV) werden mit einer **Menge** I von Werten (= Grundbereich) belegt.

  Die leere Menge ist ausgeschlossen.

  Alle Individuenvariablen (IV) sind der Menge I zuzuordnen.

- Prädikatkonstanten (PK), auf die genau eine durch eine IK bzw. IV besetzte Stelle folgt, werden mit beliebigen Teilmengen (möglich ist hier auch die leere Menge und die Allmenge/Gesamtmenge) von I belegt.

  Annahme 1: $F \ldots$ sei die **einstellige** Prädikatkonstante: „... ist rot“

  Annahme 2: Der Individuenbereich bestehe nur aus den Individuen a, b, c.

  $\Longrightarrow$ Wertebereich des Schemas Fx = Aussagen „Fa“, „Fb“ und „Fc“

  $\Longrightarrow$ Mögliche Situationen:

x	Fx
a	1
b	0
c	1

- Prädikatkonstanten (PK), auf die genau zwei durch IK bzw. IV besetzte Stellen folgen, werden mit beliebigen geordneten Paaren, deren Elemente jeweils aus I stammen, belegt.

  Annahme 1: $G \ldots$ sei die **zweistellige interpretierte** Prädikatenvariable (eine Prädikatenkonstante): „...ist größer als ...“

  Annahme 2: Der Individuenbereich bestehe wiederum nur aus den Individuen a, b, c.

  $\Longrightarrow$ Wertebereich des Schemas Gxy = Aussagen „Gaa“, „Gab“ usw.

  $\Longrightarrow$ Jetzt erfolgt eine Abbildung **geordneter Paare** von Individuen auf Wahrheitswerte.

  $\Longrightarrow$ Mögliche Situationen:

$< x, y >$	Gxy
$< a, a >$	0
$< a, b >$	1
$< a, c >$	1
$< b, c >$	0
$< b, a >$	0
$< b, b >$	0
$< c, a >$	0
$< c, b >$	1
$< c, c >$	0

  Jetzt: Wertebereich = Menge $\{1, 0\}$;

  aber: Definitionsbereich = Menge geordneter Paare der Form $< x, y >$

- Prädikatkonstanten (PK), auf die genau n durch IK bzw. IV besetzte Stellen folgen, werden mit beliebigen geordneten n-Tupeln, deren Elemente jeweils aus I stammen, belegt.

  = alleinige Relevanz der **Begriffsumfänge**

  = **extensionaler** Standpunkt

Interpretation $\mathcal{I}$

Eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist gegeben durch

1. eine nicht-leere Menge I von Werten, der die IV zugeordnet sind;
2. eine Zuordnung von jeweils genau einem Wahrheitswert zu jeder AV;
3. eine Zuordnung von jeweils genau einem Wert aus I zu jeder IK
4. einer Zuordnung von n-Tupeln von Werten aus I für n-stellige PK, d.h. für PK, auf die n mit IK oder IV besetzte Stellen folgen.

Interpretationsbeispiel

Formel	$(p \wedge Gb) \wedge \forall x Fx$
$\mathcal{I}(x)$	= {Anton, Beate, Christine}
$\mathcal{I}(p)$	= 1 (W)
$\mathcal{I}(b)$	= Beate
$\mathcal{I}(F)$	= {Anton, Christine}
$\mathcal{I}(G)$	= {Beate}

In dieser Interpretation ist der Satz falsch. **Warum?**

Alternative Interpretation:

$\mathcal{I}(F)$ = {Anton, Beate, Christine}

In dieser Interpretation ist der Satz wahr; aber weder allgemeingültig noch kontradiktorisch.

- Eine Formel ist **allgemeingültig** $=_{df}$ **jede** Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Modell der Formel, d.h.

  eine Formel ist **allgemeingültig** $=_{df}$ ihr ist relativ zu jeder Interpretation $\mathcal{I}$ der Wahrheitswert 1 (W) zugeordnet.
- Eine Formel ist **unerfüllbar / kontradiktorisch** $=_{df}$ **keine** Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Modell der Formel, d.h.

  eine Formel ist **unerfüllbar / kontradiktorisch** $=_{df}$ ihr ist relativ zu jeder Interpretation $\mathcal{I}$ der Wahrheitswert 0 (F) zugeordnet.

Bedingungstypen[1]

Die Ambivalenz der „wenn. . . , dann . . . “- bzw. „. . . genau dann, wenn . . . “-Argumente

Wir vereinbaren die folgende Notation zur **Allgemeingültigkeit** bzw. zum **gültigen Schluss**:

- Ein **Schluss** aus den Prämissen $A_1, \ldots A_n$ auf die Konklusion B heiße **gültig** gdw die Formel $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ allgemeingültig / tautologisch / L-wahr ist.
- Abkürzung: $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B$ [Die Reihenfolge der Berechnung der Konjunktionen ist beliebig!]

  Wenn ein Schluss nicht gültig ist, schreiben wir $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \not\models B$.

Aus Argumenten der Form $p \supset q$ [materiale Subjunktion/Implikation] bzw. $p \equiv q$ [materiale Bisubjunktion/Äquivalenz] folgt nichts über die verwendeten Teilsätze:

— $(p \supset q) \not\models p, \quad (p \supset q) \not\models \neg p, \quad (p \supset q) \not\models q, \quad (p \supset q) \not\models \neg q$ bzw.

— $(p \equiv q) \not\models p, \quad (p \equiv q) \not\models \neg p, \quad (p \equiv q) \not\models q, \quad (p \equiv q) \not\models \neg q.$

— Auf der Ritter- und Schurkeninsel nehmen allerdings manche Äußerungen Formen an wie $(p \equiv (p \supset q))$. Daraus folgt dann alles über p und q:

$(p \equiv (p \supset q)) \models p, \quad (p \equiv (p \supset q)) \models q,$ auch

$(p \equiv (p \supset q)) \models (p \wedge q),$ bzw. $(p \wedge q) \models (p \equiv (p \supset q)).$

Damit sind $(p \equiv (p \supset q))$ (Behauptung eines Inselbewohners) und $(p \wedge q)$ (Information für den Volksbefrager) logisch miteinander äquivalent.

[1] Vorlesung L6: UL 20080529

These In der politischen Sprache werden sehr häufig wenn-dann- bzw. falls-Konstruktionen verwendet, da sie eben keine Entscheidung für bzw. gegen die Präsmissen (Antezedenten) bzw. die Konklusion (Konsequent) beinhalten, d.h. keine entsprechenden Schlüsse erlauben.

Notwendige und hinreichende Bedingung

Die Formel $p \supset q$ hat viele verschiedene Lesarten. Z.B.: „Wenn p, dann q", „q, wenn p", „q, falls p", „q unter der Voraussetzung, dass p" usw. Andere Lesarten sind: „p ist hinreichende Bedingung für q" bzw. „q ist notwendige Bedingung für p". Aber „p ist notwendige Bedingung für q" wird ausgedrückt durch $q \supset p$!

Hinreichend/notwendig vs. logisch-hinreichend/logisch-notwendig

In mathematischen Kontexten, in der Alltagssprache und im politischen Dialog wird „hinreichend(e Bedingung)" bzw. „notwendig(e Bedingung)" häufig im Sinne von „zwingend hinreichend/notwendig" und somit „Logisch-hinreichend (L-hinreichend)/Logisch-notwendig (L-notwendig)" verstanden. Der Unterschied ist:

- $(p \supset q) \not\models p$ bzw. $(p \supset q) \not\models q$. Hier ist p nur **material hinreichende Bedingung**, aber nicht L-hinreichend. Analog für die notwendige Bedingung q. Dagegen
- $(p \wedge q) \models q$. Hier ist $(p \wedge q)$ **L-hinreichend für** q (und natürlich auch für p).
- $p \models (p \vee q)$. Hier ist p **L-hinreichend für** $(p \vee q)$ (und natürlich ist auch q L-hinreichend).

Für „notwendig und hinreichende Bedingungen" gilt diese Unterscheidung analog:

- $(p \equiv q)$: p ist **material hinreichend und notwendig für** q (also auch: q ist material hinreichend und notwendig für p). Dagegen z.B.:
- $(\neg p \vee q) \models (p \supset q)$ und $(p \supset q) \models (\neg p \vee q)$, also $(\neg p \vee q)$ ist **L-notwendig und L-hinreichend für** $(p \supset q)$.

„wenn", „nur wenn" und „nur"

Wir übersetzten im Rahmen der KL „q, falls p" mit $(p \supset q)$. Ein typisches Übersetzungsproblem taucht auf, wenn Sätze der Form „q, nur wenn (falls) p" bzw. „Nur Stürmer der Mannschaft schießen Tore" übersetzt werden sollen.

(1) „q, nur wenn (falls) p": $(q \supset p)$.

In diesem Falle hat das „nur" in „nur wenn" genau die Wirkung der Vertauschung der materialen Bedingungen: hinreichend in notwendig und umgekehrt.

(2) „Alle Stürmer der Mannschaft schießen Tore.": $\forall x(Sx \supset Tx)$ mit „Nur Stürmer der Mannschaft schießen Tore.": $\forall x(Tx \supset Sx)$.

Der erste Satz ist wahr, wenn jeder Stürmer (einer Mannschaft) im Verlaufe eines Spieles ein Tor geschossen hat. Der Satz bleibt natürlich auch wahr, wenn weitere Spieler (z.B. Verteidiger) Tore geschossen haben.

Der zweite Satz ist wahr, wenn jedes während des Spieles gefallene Tor von einem Stürmer erzielt wurde. Daran muss allerdings nicht jeder Stürmer beteiligt sein. Der Satz ist falsch wenn z.B. ein Verteidiger ein Tor erzielt hat.

(3) Sätze der Art „Nur Anton kam zur Feier [und niemand sonst]." erfordern zur Übersetzung die Einbeziehung der Identität:

$Fa \wedge \forall x(Fx \supset x = a)$.

Argumentation und Beweis[1]

System des natürlichen Schließens [= SNS]

1. Die Grundregeln

- **Grund**regeln müssen plausibel gemacht werden.
- **Grund**regeln sind konstitutiv für eine zwingende Argumentation (einen Beweis).
- **Grund**regeln können nicht definiert bzw. selbst bewiesen werden.

Wir unterscheiden 2 Typen von Regeln:

- **Schlussregeln** und
- **Strukturregeln**.

Die **Schlussregeln** legen die einzelnen Beweiszüge fest:

$$\frac{\begin{array}{c}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{array}}{B}$$

A_1	
$\vdots$	
A_n	
A_{n+1}	gemäß der Anwendung einer Schlussregel
A_{n+2}	gemäß der Anwendung einer Schlussregel
$\vdots$	gemäß der Anwendungen von Schlussregeln
B	gemäß der Anwendung einer Schlussregel

— Schlussregeln sollen **intuitiv plausibel** und **einfach** sein.

— Schlussregeln bestehen aus **höchstens zwei Prämissen** und einer Konklusion.

— Schlussregeln charakterisieren die argumentativen Eigenschaften von logischen Operatoren (Funktoren und Quantoren).

[1] Vorlesung L7: UL 20080605

1.1. Grundschlussregeln

Grundschlussregeln für Funktoren

AR Abtrennungsregel

$$\frac{\begin{array}{l} A \supset B \\ A \end{array}}{B}$$

EK Einführung der Konjunktion

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

BK Beseitigung der Konjunktion

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

EA Einführung der Alternative

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

BA Beseitigung der Alternative

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \end{array}}{B} \qquad \frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg B \end{array}}{A}$$

EÄ Einführung der Äquivalenz/Bisubjunktion

$$\frac{\begin{array}{l} A \supset B \\ B \supset A \end{array}}{A \equiv B}$$

BÄ Beseitigung der Äquivalenz/Bisubjunktion

$$\frac{A \equiv B}{A \supset B} \qquad \frac{A \equiv B}{B \supset A}$$

Erläuterung: Einsetzungen für Individuenausdrücke

Symbol für Einsetzungen von Individuenausdrücken j für Individuenausdrücke i: $A[i/j]$

(1) In A wird immer nur an den Stellen eingesetzt, wo es frei vorkommt. Kommt i mehrmals frei in A vor, so wird es an allen Stellen seines freien Vorkommens durch j ersetzt.

Beispiele:

$[x/a]$ von $Fx \supset Gx$ liefert $Fa \supset Ga$, aber nicht $Fa \supset Gx$.

$[x/a]$ von $Fy \supset Gx$ liefert $Fy \supset Ga$.

$[x/a]$ von $(Fx \wedge \exists xHx) \supset Gx$ liefert $(Fa \wedge \exists xHx) \supset Ga$,

aber keinesfalls $(Fa \wedge \exists xHa) \supset Ga$ bzw. $(Fa \wedge \exists aHa) \supset Ga$.

(2) Falls sich i in A im Wirkungsbereich eines Quantors befindet, der die Individuenvariable (IV) h bindet, so darf h nicht für i eingesetzt werden (Verbot der Umwandlung freier Vorkommen in gebundene).

Beispiel: In der Formel $\forall x(Fx \supset Gy)$ darf y nicht durch x ersetzt werden. i wird in diesem Beispiel durch y und h durch x repräsentiert. Verbot von $[y/x]$, was aus der Aussagenform $\forall x(Fx \supset Gy)$ die Aussage $\forall x(Fx \supset Gx)$ erzeugen würde!

Grundschlussregeln für Quantoren

B∀ Beseitigung des Allquantors

$\dfrac{\forall iA}{A[i/j]}$, wobei j eine beliebige IV oder eine beliebige IK sein kann.

Beachte: Allquantoren können mehrfach beseitigt werden!

E∀ Einführung des Allquantors

$\dfrac{A}{\forall iA}$, falls die IV i nicht frei in den AdB vorkommt.

B∃ Beseitigung des Existenzquantors

$$\frac{\exists i A}{A[i/k_{j_1,j_2,\dots j_n}]}$$, wobei k eine IK ist, die

(1) noch nicht durch B∃ eingeführt wurde und

(2) $j_1, j_2, \dots j_n$ alle freien IV der Formel A sind, die verschieden von i sind. D.h. falls die Individuenvariable i in mehrstelligen Prädikatkonstenten vorkommt insbesondere auch, dass die Individuenkonstante k mit den Indizes aller anderen freien Individuenvariablen dieser Prädikatkonstante versehen werden muss.

Die Einschränkung (1) verhindert z.B. den Schluss von

Annahme A_1: In dieser Urne gibt es mindestens eine rote Kugel:

$\exists x Fx$ und

Annahme A_2: In dieser Urne gibt es mindestens eine grüne Kugel:

$\exists x Gx$ auf die

Konklusion B: In dieser Urne gibt es mindestens eine Kugel, die sowohl rot als auch grün ist:

$\exists x(Fx \wedge Gx)$.

Die Einschränkung (2) verhindert z.B. den Schluss von der

Annahme A: Zu jedem Tag gibt es mindestens einen Tag, der auf ihn folgt (= „Es gibt immer ein Morgen.“):

$\forall x \exists y Fyx$ auf die

Konklusion B: Es gibt mindestens einen (den) Tag, der auf alle Tage folgt (= „Es gibt einen (den) jüngsten Tag.“):

$\exists y \forall x Fyx$ ($\forall x Fax$).

E∃ Einführung des Existenzquantors

$$\frac{A[i/j]}{\exists i A}$$, wobei j eine IV oder eine IK sein kann.

1.2. Grundstrukturregeln

Strukturregeln zum Aufbau eines direkten Beweises

(1) Als die ersten n Zeilen des Beweises schreibe man die Prämissen $A_1, A_2, \ldots A_n$ als **Annahmen des Beweises** [**AdB**].

(2) Bereits bewiesene **Theoreme** können als neue Zeilen zum Beweis hinzugefügt werden.

(3) Auf der Grundlage schon vorhandener Zeilen können unter der Verwendung der 11 Grundschlussregeln neue Zeilen zum Beweis hinzugefügt werden.

(4) Der Beweis ist beendet, wenn man als eine Zeile des Beweises die Konklusion B erhält.

Definition des Begriffs „**Theorem**":

Eine Argumentation der Form $\dfrac{\begin{array}{c}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{array}}{B}$ ist ein Theorem, wenn es für die Konklusion B einen **direkten Beweis** aus den Prämissen $A_1, A_2, \ldots A_n$ gibt.

Beispiel

Folgt aus „Wenn Peter kommt, dann kommt Quintus." [$p \supset q$] und „Wenn Peter kommt, dann kommt Richard." [$p \supset r$] unter der Voraussetzung, dass Peter wirklich kommt [p], dass sowohl Quintus als auch Richard kommen [$q \wedge r$]?

(1)	$p \supset q$	AdB
(2)	$p \supset r$	AdB
(3)	p	AdB
(4)	q	AR (1),(3)
(5)	r	AR (2),(3)
(6)	$q \wedge r$	EK (4),(5)

Strukturregeln zum Aufbau eines indirekten Beweises

(1) Als die ersten n Zeilen des Beweises schreibe man die Prämissen $A_1, A_2, \ldots A_n$ als **Annahmen des Beweises** [**AdB**].

(2) Als $n+1$-te Zeile schreibe man $\neg B$ als Annahme des indirekten Beweises [**AdiB**].

(3) Bereits bewiesene **Theoreme** können als neue Zeilen zum Beweis hinzugefügt werden.

(4) Auf der Grundlage schon vorhandener Zeilen können unter der Verwendung der 11 Grundschlussregeln neue Zeilen zum Beweis hinzugefügt werden.

(5) Der Beweis ist beendet, wenn als beliebige Zeilen des Beweises eine Formel C und ihre Negation $\neg C$ auftreten.

Erweiterung der Definition des Begriffs „**Theorem**“:

Eine Argumentation ist ein Theorem, wenn es für die Konklusion B einen **direkten** oder einen **indirekten Beweis** aus den Prämissen $A_1, A_2, \ldots A_n$ gibt.

Beispiel

(1)	$p \supset q$	AdB	
(2)	$\neg q \vee r$	AdB	
(3)	$\neg s \supset \neg r$	AdB	
(4)	p	AdB	Folgt daraus s?
(5)	$\neg s$	AdiB	
(6)	q	AR (1),(4)	
(7)	r	BA (2),(6)	
(8)	$\neg r$	AR (3),(5)	

Wsp. (7),(8)

Also ist die gesamte Argumentation ein Theorem!

Schlussregeln des Systems des natürlichen Schließens[1]

1. Grundschlussregeln

AR Abtrennungsregel

$$\frac{A \supset B \qquad A}{B}$$

BK Beseitigung der Konjunktion

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

EK Einführung der Konjunktion

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad \frac{B \qquad A}{A \wedge B}$$

BA Beseitigung der Alternative

$$\frac{A \vee B \qquad \neg A}{B} \qquad \frac{A \vee B \qquad \neg B}{A}$$

EA Einführung der Alternative

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

BÄ Beseitigung der Äquivalenz

$$\frac{A \equiv B}{A \supset B} \qquad \frac{A \equiv B}{B \supset A}$$

EÄ Einführung der Äquivalenz

$$\frac{A \supset B \qquad B \supset A}{A \equiv B} \qquad \frac{B \supset A \qquad A \supset B}{A \equiv B}$$

B∀ Beseitigung des Allquantors

$$\frac{\forall i A}{A[i/j],}$$

wobei j eine beliebige IV oder eine IK sein kann.

E∀ Einführung des Allquantors

$$\frac{A}{\forall i A,}$$

falls die IV i nicht frei in den AdB vorkommt.

B∃ Beseitigung des Existenzquantors

$$\frac{\exists i A}{A[i/j],}$$

wobei j eine IK ist, die
1. noch nicht durch B∃ eingeführt wurde bzw. nicht in den Annahmen des Beweises vorkommt und
2. durch alle frei in A vorkommenden IV indiziert werden muss (beachte mehrstellige PK).

E∃ Einführung des Existenzquantors

$$\frac{A[i/j]}{\exists i A,}$$

wobei j eine IV oder eine IK sein kann.

2. Abgeleitete Schlussregeln

BN Beseitigung der doppelten Negation

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

EN Einführung der doppelten Negation

$$\frac{A}{\neg\neg A}$$

MT Modus Tollens

$$\frac{A \supset B \qquad \neg B}{\neg A}$$

KP Kontraposition

$$\frac{A \supset B}{\neg B \supset \neg A}$$

[1] Übersicht zur Vorlesung L8: UL 20080612 + Verwendbarkeit für die Klausur am 17.07.2008

3. Abgeleitete Schlussregeln (Umwandlungsregeln)

Umwandlung	Negation des Gesamtausdrucks	Negation des linken Teilausdrucks	Negation des rechten Teilsausdrucks
$\wedge \leftrightsquigarrow \vee$ (deMorgan)	X	X	X
$\wedge \leftrightsquigarrow \supset$	X		X
$\vee \leftrightsquigarrow \supset$		X	

Umwandlung	Negation des Gesamtausdrucks	Negation des Arguments
$\forall \leftrightsquigarrow \exists$	X	X

Einige Beispiele:

(1) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ [de Morgan bzw. Umwandlung von $\wedge$ in $\vee$ u. vice versa]

(2) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ [de Morgan bzw. Umwandlung von $\vee$ in $\wedge$ u. vice versa]

(3) $\neg(A \supset B) \equiv (A \wedge \neg B)$ [Umwandlung von $\supset$ in $\wedge$ u. vice versa]

(4) $(A \supset B) \equiv (\neg A \vee B)$ [Umwandlung von $\supset$ in $\vee$ u. vice versa]

(5) $\forall x Fx \equiv \neg\exists x \neg Fx$ [Umwandlung von $\forall$ in $\exists$ u. vice versa]

(6) $\exists x Fx \equiv \neg\forall x \neg Fx$ [Umwandlung von $\exists$ in $\forall$ u. vice versa]

(7) $\forall x(Fx \supset Gx) \equiv \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ [Umwandlung von $\forall$ in $\exists$ + $\supset$ in $\wedge$ u. vice versa]

(8) $\neg\exists x(Fx \wedge Gx) \equiv \forall x(Fx \supset \neg Gx)$ [Umwandlung von $\exists$ in $\forall$ + $\wedge$ in $\supset$ u. vice versa]

(9) $(A \supset B) \equiv (\neg B \supset \neg A)$ [vgl. Kontraposition]

Darstellungsmöglichkeiten für das *ausschließende Oder*

$\neg(A \equiv B)$ $\neg A \equiv B$ $A \equiv \neg B$ $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Wahrheitstabellen für klassische Funktoren(-verknüpfungen)

p	$\neg p$
1	0
0	1

p,q	und $p \wedge q$	oder $p \vee q$	wenn-dann $p \supset q$	genau dann, wenn $p \equiv q$	weder-noch $\neg p \wedge \neg q$	nicht-sondern $\neg p \wedge q$	entweder oder $\neg p \equiv q$	statt dass $p \wedge \neg q$
1,1	1	1	1	1	0	0	0	0
1,0	0	1	0	0	0	0	1	1
0,1	0	1	1	0	0	1	1	0
0,0	0	0	1	1	1	0	0	0

Die Darstellung der vier traditionellen Satzformen

Alle S sind P.	**S a P**	$\forall x(Sx \supset Px)$	$\neg\exists x(Sx \wedge \neg Px)$	Nur P sind S.
Einige S sind P.	**S i P**	$\exists x(Sx \wedge Px)$	$\neg\forall x(Sx \supset \neg Px)$	
Kein S ist P.	**S e P**	$\forall x(Sx \supset \neg Px)$	$\neg\exists x(Sx \wedge Px)$	
Einige S sind nicht P.	**S o P**	$\exists x(Sx \wedge \neg Px)$	$\neg\forall x(Sx \supset Px)$	

Abgeleitete Strukturregeln[1]

Abgeleitete Regeln dienen nur zur Vereinfachung der Beweisführung – sie sind also prinzipiell eliminierbar.

Regel zum Hinzufügen einer Implikation aufgrund einer zusätzlichen Annahme

Erhält man in einem Beweis aus den Annahmen dieses Beweises und einer beliebigen zusätzlichen Annahme C [doppelt nummeriert] die Formel D, so kann man die Formel $C \supset D$ als neue Zeile zum Beweis [einfach nummeriert] hinzufügen. [Anmerkung: Alle Zeilen, die auf die zusätzliche Annahme Bezug nehmen und nicht die Form $C \supset D$ haben, werden doppelt nummeriert.]

Beispiel

Annahme 1 A_1: $p \supset (q \wedge r)$

Annahme 2 A_2: $q \supset (p \wedge r)$

Konklusion B: $p \equiv q$??

(1)	$p \supset q \wedge r$	AdB
(2)	$q \supset p \wedge r$	AdB
(1.1)	p	z.A.
(1.2)	$q \wedge r$	AR (1),(1.1)
(1.3)	q	BK (1.2)
(3)	$p \supset q$	z.A.(1.1) $\supset$ (1.3)
(2.1)	q	z.A.
(2.2)	$p \wedge r$	AR (2),(2.1)
(2.3)	p	BK (2.2)
(4)	$q \supset p$	z.A.(2.1) $\supset$ (2.3)
(5)	$p \equiv q$	EÄ (3),(4)

[1] Vorlesung L8: UL 20080612

Regel zur Einführung der Negation einer zusätzlichen Annahme

Erhält man in einem Beweis aus den Annahmen dieses Beweises und einer beliebigen zusätzlichen Annahme C [doppelt nummeriert] zwei sich widersprechende Formeln D und $\neg D$, so kann man die Negation der zusätzlichen Annahme als neue Zeile [einfach nummeriert] zum Beweis hinzufügen. [Anmerkung: Alle Zeilen, die auf die zusätzliche Annahme Bezug nehmen, werden wiederum doppelt nummeriert.]

Beispiel

(1)	$p \equiv q$	AdB	
(2)	$\neg r \supset \neg q$	AdB	
(3)	$\neg(r \wedge p)$	AdB	
(4)	$\neg r \supset p$	AdB	Was folgt daraus über p, q bzw. r?
(5)	$p \supset q$	BÄ (1)	
(6)	$q \supset p$	BÄ (1)	
(7)	$\neg r \vee \neg p$	$\wedge \rightsquigarrow \vee$ (3)	
(1.1)	p	z.A.	
(1.2)	q	AR (5),(1.1)	
(1.3)	$\neg r$	BA (7),(1.1)	
(1.4)	$\neg q$	AR (2),(1.3)	
(8)	$\neg p$	Wsp. (1.2),(1.4)	
(9)	$\neg q$	MT (6),(8)	
(10)	r	MT (4),(8)	

Es folgen also die Falschheit von p (gemäß Zeile 8: $\neg p$), von q (gemäß Zeile 9: $\neg q$), und die Wahrheit von r (gemäß Zeile 10).

Beispiel: Ritter- und Schurkeninsel

Ausgangslage:

Der Sprecher (Ehemann) behauptet einen Satz A.

p: Der Ehemann ist Ritter.

$\neg p$: Der Ehemann ist Schurke (kein Ritter).

(i) $p \supset A$:

Wenn der Ehemann (Sprecher) ein Ritter ist, dann ist A wahr.

(ii) $\neg p \supset \neg A$:

Wenn der Ehemann (Sprecher) ein Schurke ist, dann ist A falsch.

(iii) $A \supset p$ — Kontraposition von (ii)

(iv) $p \equiv A$ — Einführung der Äquivalenz auf (i) und (iii)

(iv) repräsentiert also ein Behauptungsprädikat für den Ehemann. Dabei ist A die gemachte Behauptung.

Aufgabe: Der Ehemann behauptet: "Ich und meine Frau sind Schurken." ("Wir sind beide Schurken.")

Was folgt daraus über den Ehemann und die Ehefrau?

q: Die Ehefrau ist Ritter. / $\neg q$: Die Ehefrau ist Schurke.

A: $\neg p \wedge \neg q$

$p \equiv (\neg p \wedge \neg q)$: (Gesamtbehauptung und AdB)

(1)	$p \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	AdB
(2)	$p \supset (\neg p \wedge \neg q)$	BÄ (1)
(1.1)	p	z.A.
(1.2)	$\neg p \wedge \neg q$	AR (2),(1.1)
(1.3)	$\neg p$	BK (1.2)
(3)	$\neg p$	Wsp. (1.1),(1.3)
(4)	$(\neg p \wedge \neg q) \supset p$	BÄ (1)
(5)	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	MT (4),(3)
(6)	$p \vee q$	$\wedge \rightsquigarrow \vee$ (5)
(7)	q	BA (6),(3)

Also ist der Mann ein Schurke (wegen Zeile 3) und die Frau ist ein Ritter (wegen Zeile 7).

Die Konstruktion von Gegenbeispielen

$\Longrightarrow$ Annahme: Der Individuenbereich enthält nur die zwei Individuen a und b ($= \{a, b\}$)

Allsätze als Konjunktionen im endlichen Individuenbereich

$$\forall x Gx = (Ga \wedge Gb)$$

$$\forall x(Fx \supset Gx) = ((Fa \supset Ga) \wedge (Fb \supset Gb))$$

Existenzsätze als Alternativen im endlichen Individuenbereich

$$\exists x Gx = (Ga \vee Gb)$$

$$\exists x(Fx \wedge Gx) = ((Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$$

Ein Gegenbeispiel

Ausgangsformel:

$$\exists x Fx \wedge \exists x Gx \supset \exists x(Fx \wedge Gx)$$

Gegenbeispiel:

$$(Fa \vee Fb) \wedge (Ga \vee Gb) \supset ((Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb))$$

Aussagenlogische Struktur:

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \supset ((p \wedge r) \vee (q \wedge s))$$

Überprüfung mittels verkürzter Matrizenmethode liefert keinen Widerspruch für

$p = 1, q = 0, r = 0$ und $s = 1$!

1. Sie haben jeweils zwei Texte zur Auswahl; einen von beiden kann man eher als Begründung ansehen. Kreuzen Sie ihn an!
   a. Finck hat kein Recht, sich zu beklagen, wenn er beraubt wird. Er raubt ja selber.
   Finck geschieht kein Unrecht, wenn er beraubt wird. Er raubt ja selber.
   b. Wilsons Meinung zur EG ist grundfalsch. Schließlich hat er vor zwei Jahren genau das Gegenteil behauptet.
   Wilsons Meinung zur EG ist leichtfertig. Schließlich hat er vor zwei Jahren genau das Gegenteil behauptet.
   c. Die Sache mit den Wahlspenden ist für die Öffentlichkeit uninteressant, Herr Chefredakteur. Bedenken Sie, wie gern mein Ministerium Sie immer informiert hat!
   Die Sache mit den Wahlspenden bringen Sie besser nicht, Herr Chefredakteur. Bedenken Sie, wie gern mein Ministerium Sie bisher immer informiert hat!

2. Kreuzen Sie jeweils den Satz an, den man in der angegebenen Weise zu begründen versuchen kann!
   a. Schopenhauer hatte selbst große Angst vor dem Tode. Deshalb
   - ist seine Verherrlichung des Freitodes unhaltbar.
   - wirkt seine Verherrlichung des Freitodes nicht sehr ehrlich.
   b. Der Selbstmörder kann seine Schuld nicht mehr sühnen. Deshalb
   - ist Schopenhauers Verherrlichung des Freitodes unhaltbar.
   - wirkt Schopenhauers Verherrlichung des Freitodes nicht sehr ehrlich.

3. Kreuzen Sie jeweils den Satz an, mit dessen Hilfe man am besten die jeweilige Behauptung begründen kann!
   a. Schwarzfahren ist Unrecht. Denn
   - wer das tut, fährt auf Kosten anderer.
   - wer erwischt wird, muß Strafe zahlen.
   - das Fahrgeld fließt den Stadtwerken zu.
   b. Schwarzfahren kann teuer kommen. Denn
   - wer das tut, fährt auf Kosten anderer.
   - wer erwischt wird, muß Strafe zahlen.
   - das Fahrgeld fließt den Stadtwerken zu.
   c. Schwarzfahren vergrößert das Defizit der Stadtwerke. Denn
   - wer das tut, fährt auf Kosten anderer.
   - wer erwischt wird, muß Strafe zahlen.
   - das Fahrgeld fließt den Stadtwerken zu.

1. Welche der Umformulierungen trennt jeweils Prämisse(n) und Konklusion in a.–c. am deutlichsten?
   a. Bei ihrem typischen Neid können Egoisten nicht glücklich sein.
   - Egoisten sind unglücklich; deshalb sind sie typisch neidisch.
   - Egoisten sind typischerweise neidisch; daher können sie nicht glücklich sein.
   - Typischer Neid macht egoistisch, und Egoismus verursacht Unglück.
   b. Das ist zu schön, um wahr zu sein.
   - Das ist zu schön; daher kann es nicht wahr sein.
   - Das ist zu schön, damit es wahr ist.
   - Das ist nicht wahr; daher ist es schön.
   c. Angesichts der Allmacht Gottes müssen Wunder möglich sein.
   - Das Wunder im Angesichte des allmächtigen Gottes geschehen, sind sie möglich.
   - Gottes Allmacht ist wirklich, und was wirklich ist, ist möglich; daher sind Wunder möglich.
   - Gott ist allmächtig; daher sind Wunder möglich.

2. Welche der Formulierungen gibt jeweils die in Prämisse(n) und Konklusion getrennten Begründungen a. und b. am besten wieder?
   a. Sie hat ihn sitzen lassen; daher ist anzunehmen, daß sie ihn nicht mehr ausstehen kann.
   - Sie hat ihn sitzen lassen, weil sie ihn vermutlich nicht mehr ausstehen kann.
   - Vermutlich hat sie ihn sitzen lassen, da sie ihn ja nicht mehr ausstehen kann.
   - Wo sie ihn hat sitzen lassen, muß sie ihn wohl nicht mehr ausstehen können.
   b. Er ist eifersüchtig. Daher ist anzunehmen, daß er aus Wut auf den Nebenbuhler so gehandelt hat.
   - Im Lichte seiner Eifersucht betrachtet, geschah seine Tat aus Wut auf den Nebenbuhler.
   - Auf Grund seiner Eifersucht hat er eine Wut auf seinen Nebenbuhler.
   - Er nimmt an, daß sein Nebenbuhler aus Eifersucht so wütend auf ihn ist.

1. Eine Begründung wird mehrfach beurteilt, manchmal formal, manchmal inhaltlich. Kreuzen Sie die formalen Beurteilungen der Begründung an!
   Bielefeld ist größer als Köln; denn Köln kommt fast auf 900000 Einwohner, während Bielefeld ca. 200000 hat.
   - Was größer ist, weiß ich nicht; aber wenn die Zahlen stimmen, dann gilt genau das Gegenteil.
   - Köln ist höchstens halb so groß, wie hier behauptet wird.
   - Man braucht bloß den 1. FC Köln und Arminia Bielefeld zu vergleichen, um zu sehen, daß Köln größer ist.
   - Das ist zweifelhaft; Bielefeld kann doch durch die Universitätsgründung nicht derart stark gewachsen sein.
   - Wenn dem so ist, dann muß das überraschende Ergebnis zutreffen.

2. Eine Begründung wird mehrfach beurteilt:
   Da Menschen vernünftige Lebewesen sind, sind Geisteskranke keine Menschen.
   a. Die Begründung ist schon deshalb falsch, weil man ein solches Ergebnis einfach nicht akzeptieren kann.
   b. Vernünftig oder nicht spielt keine Rolle, weil sowieso nicht alle Menschen vernünftig sind.
   Die Beurteilung a. nimmt Stellung
   - zur Prämisse
   - zur Konklusion
   - weder zur Prämisse noch zur Konklusion
   Kreuzen Sie alle richtigen Beschreibungen der Begründung an!
   Die Beurteilung b. nimmt Stellung
   - zur Prämisse
   - zur Konklusion
   - zur Relevanz der Prämisse
   Kreuzen Sie alle richtigen Beschreibungen der Begründung an!

3. Eine Begründung wird mehrfach beurteilt:
   Hans lügt bestimmt; gestern hat er ja auch gelogen!
   a. Wie kann man das sagen, nur weil Hans einmal gelogen hat!
   b. Es stimmt einfach nicht, daß Hans gestern gelogen hat.
   Die Beurteilung a. ist formal, weil sie
   - einer rein formalistischen Betrachtungsweise folgt.
   - der Prämisse das Gewicht für die Konklusion abstreitet.
   Die Beurteilung b. ist innaltlich, weil sie
   - die Prämisse bezweifelt.
   - die Konklusion bezweifelt.
   - die Prämisse für irrelevant erklärt.

Ein großer Teil der Handlung dieses Buches hat die Insel der Ritter und Schurken zum Schauplatz, wo – wie wir bereits wissen – Ritter nur wahre Aussagen machen, Schurken dagegen nur falsche, und wo jeder Einwohner entweder ein Ritter oder ein Schurke ist.
Ein fundamentales Faktum über diese Insel ist, daß kein Einwohner behaupten kann, ein Schurke zu sein. Denn ein Ritter würde niemals lügen und sagen, er sei ein Schurke, und ein Schurke würde niemals wahrheitsgemäß zugeben, ein Schurke zu sein.
Die folgenden vier Aufgaben führen die logischen Verbindungen »und«, »oder«, »wenn ..., so ...« und »genau dann, wenn« ein, die wir in Teil III stärker formal behandeln wollen.

McGregors Besuch

Der Volkszähler McGregor kam eines Tages zu einem Arbeitseinsatz auf die Insel der Ritter und Schurken. Auf dieser Insel werden auch Frauen als Ritter und Schurken bezeichnet. Herr McGregor beschloß, bei diesem Besuch nur Ehepaare zu befragen.

1. (und)

McGregor klopfte an eine Tür. Der Ehemann öffnete sie halb und fragte McGregor nach seinem Anliegen. »Ich bin Volkszähler«, antwortete McGregor, »und brauche Daten über Sie und Ihre Frau. Wer von Ihnen, wenn überhaupt, ist ein Ritter, und wer, wenn überhaupt, ist ein Schurke?«
»Wir sind beide Schurken!« sagte der Mann ärgerlich und schlug die Tür zu.

Welchem Typ gehört der Ehemann an und welchem Typ seine Frau?

2. (oder)

Beim nächsten Haus angekommen, fragte McGregor den Ehemann: »Sind Sie beide Schurken?« Der Mann antwortete: »Mindestens einer von uns.«
Welchem Typ ist jeder der beiden zuzurechnen?

3. (Wenn ..., so ...)

Das nächste Haus, das McGregor aufsuchte, stellte ihn vor eine schwierige Frage. Die Tür wurde zögernd von einem sehr mißtrauischen Mann geöffnet. Nachdem McGregor ihn gebeten hatte, etwas über sich und seine Frau zu sagen, war alles, was der Ehemann über die Lippen brachte: »Wenn ich ein Ritter bin, so ist meine Frau auch einer.«
McGregor ging wenig erfreut weiter. »Wie kann ich mit einer so unverbindlichen Antwort überhaupt irgend etwas über einen von beiden feststellen?« dachte er. Er war schon im Begriff, »Mann und Frau beide unbekannt« aufzuschreiben, als er sich plötzlich an eine Logikstunde aus seinen Studienanfängen in Oxford erinnerte. »Natürlich«, sagte er sich, »ich kann beide ihrem Typ zuordnen!«
Welchem Typ gehört der Ehemann an, und wie ist seine Frau einzuordnen?

4. (Genau dann, wenn)

Als der Volkszähler das vierte Paar befragte, sagte der Ehemann: »Meine Frau und ich sind von gleichem Typ; entweder sind wir beide Ritter oder beide Schurken.«
(Der Mann hätte statt dessen auch sagen können: »Ich bin ein Ritter genau dann, wenn meine Frau ein Ritter ist.« Es läuft aufs gleiche hinaus.)
Welchen Schluß kann man daraus über den Ehemann ziehen, und was kann man über seine Frau sagen?

5.

Welche Aussage könnte ein Insulaner machen, aus der Sie schließen könnten, daß es, wenn er ein Ritter ist, auf der Insel Gold gibt, daß es jedoch, wenn er ein Schurke ist, um das Goldvorkommen ungewiß steht – vielleicht gibt es Gold, vielleicht auch nicht?

6.

Welche Aussage könnte ein Insulaner machen, so daß Sie schließen könnten, daß er, wenn es auf der Insel Gold gibt, ein Ritter sein muß, doch wenn es kein Gold auf der Insel gibt, er entweder ein Ritter oder ein Schurke sein muß?

7.

Einmal habe ich diese Insel besucht und einen Bewohner gefragt: »Gibt es auf dieser Insel Gold?« Alles, was er zur Antwort gab, war: »Ich habe nie behauptet, daß es auf dieser Insel Gold gibt.« Später fand ich heraus, daß es auf der Insel tatsächlich Gold gab. War der Bewohner ein Ritter oder ein Schurke?

EINER DER Zentralbegriffe in diesem Buch ist der des *formalen Systems*. Die Art von formalen Systemen, die ich verwende, hat der amerikanische Logiker Emil Post in den Zwanzigerjahren erfunden. Sie wird oft als „Postsches Produktionssystem" bezeichnet. Dieses Kapitel führt dem Leser ein formales System vor, und darüber hinaus hoffe ich, daß er dieses formale System zumindest ein bißchen zu erforschen wünscht; um seine Neugier zu reizen, habe ich ein kleines Rätsel entworfen.

Es lautet: „Können Sie **MU** erzeugen?" Zunächst werde ich Ihnen eine *Kette* vorlegen, d. h. eine Kette von Zeichen*. Damit Sie nicht gleich ungeduldig werden: diese Kette ist **MI**. Dann geben wir Ihnen einige Regeln, mit denen Sie eine Kette in eine andere verwandeln können. Wenn zu einem gewissen Zeitpunkt eine dieser Regeln anwendbar ist und Sie sie verwenden möchten, können Sie das tun – aber es gibt keine Vorschrift, welche Regel Sie verwenden sollen, wenn mehrere anwendbar sind. Das können Sie entscheiden – und das ist natürlich der Punkt, an dem das Spielen mit dem formalen System so etwas wie eine Kunst werden kann. Die Hauptsache, die fast nicht erwähnt zu werden braucht, ist, daß Sie nichts tun dürfen, was die Regeln verletzt. Wir können diese Einschränkung die „Formalitätsbedingung" nennen. In diesem Kapitel bedarf das wahrscheinlich keiner Betonung. So seltsam es aber klingen mag – ich sage Ihnen voraus, daß Sie, wenn Sie mit einigen formalen Systemen in späteren Kapiteln spielen, feststellen werden, daß Sie die Formalitätsbedingung immer und immer wieder verletzen werden, wenn Sie nicht bereits früher mit formalen Systemen gearbeitet haben.

Bei unserem formalen System – dem *MIU-System* – ist als erstes zu sagen, daß es nur drei Buchstaben des Alphabets verwendet, nämlich **M**, **I** und **U**. Das bedeutet, daß die einzigen Ketten des MIU-Systems diejenigen sind, die sich aus diesen drei Buchstaben zusammensetzen. Nachstehend einige Ketten des MIU-Systems:

MU
UIM
MUUMUU
UIIUMIUUIMUIIUMIUUIMUIIU

* In diesem Buch halten wir uns an folgende Konventionen, wenn wir von Zeichenketten reden: wenn die Zeichenkette in der gleichen Schriftart ist wie der Text, wird sie in einfachen oder doppelten Anführungszeichen eingeschlossen. Interpunktionen, die zum Satz und nicht zur Kette gehören, stehen logischerweise *außerhalb* der Anführungszeichen. Z. B. ist der erste Buchstabe dieses Satzes „Z", während der erste Buchstabe von „diesem Satz" „d" ist. Wenn die Kette in der Schriftart **Syntax** gesetzt ist, lassen wir die Anführungszeichen im allgemeinen weg, wenn sie nicht um der Klarheit willen nötig sind. Der erste Buchstabe von **Syntax** ist z. B. **S**.

Obgleich jedoch all das legitime Ketten sind, sind es nicht Ketten, die Sie „besitzen". Die einzige Kette in Ihrem Besitz ist vorderhand **MI**. Nur wenn Sie die Regeln anwenden, die wir gleich angeben werden, können Sie Ihre private Sammlung erweitern. Hier die erste Regel:

REGEL I: Wenn Sie eine Kette besitzen, deren letzter Buchstabe **I** ist, können Sie am Schluß ein **U** zufügen.

Wenn Sie es übrigens noch nicht erraten haben sollten, eine der Bedeutungen von „Kette" ist die, daß die Buchstaben in einer feststehenden Ordnung sind. Zum Beispiel sind **MI** und **IM** zwei verschiedene Ketten. Eine Kette von Symbolen ist nicht einfach ein „Sack" voller Symbole, bei dem die Ordnung keine Rolle spielt.

Hier die zweite Regel:

REGEL II: Angenommen Sie haben **M***x*. Dann können Sie Ihrer Sammlung **M***xx* zufügen.

Was ich damit meine, zeigen die folgenden Beispiele:

Aus **MIU** können Sie **MIUIU** erhalten.
Aus **MUM** können Sie **MUMUM** erhalten.
Aus **MU** können Sie **MUU** erhalten.

So steht also der Buchstabe „*x*" in der Regel für irgendeine Kette; wenn Sie aber einmal entschieden haben, für welche, müssen Sie bei Ihrer Entscheidung bleiben (bis Sie die Regel wieder anwenden. An diesem Punkt können Sie eine neue Wahl treffen). Beachten Sie das dritte Beispiel. Es zeigt, wie Sie, wenn Sie **MU** besitzen, eine weitere Kette in Ihre Sammlung aufnehmen können – aber zuerst müssen Sie **MU** haben! Zu dem Buchstaben „*x*" noch ein letzter Kommentar: Er gehört dem formalen System nicht in der gleichen Art und Weise an wie die drei Buchstaben „**M**", „**I**" und „**U**". Indessen ist es nützlich, eine Möglichkeit zu haben, allgemein, symbolisch über die Ketten des Systems sprechen zu können, und das ist die Funktion von „*x*": eine beliebige Kette zu repräsentieren. Wenn Sie jemals eine Kette, die ein „*x*" enthält, Ihrer „Sammlung" einverleiben, haben Sie etwas falsch gemacht, denn Ketten des MIU-Systems enthalten niemals „*x*"!

Die dritte Regel:

REGEL III: Wenn in einer der Ketten Ihrer Sammlung **III** vorkommt, können Sie eine neue Kette mit **U** anstelle von **III** bilden.

Beispiele:

Aus **UMIIIMU** können Sie **UMUMU** machen.
Aus **MIIII** können Sie **MIU** (oder auch **MUI**) machen.
Bei **IIMII** kommen Sie mit dieser Regel nicht weiter.
(Die drei **I** müssen aufeinander folgen.)
Aus **MIII** ergibt sich **MU**.

Unter keinen Umständen dürfen Sie annehmen, daß Sie diese Regel auch rückläufig verwenden können wie im folgenden Beispiel:

Aus **MU** mache **MIII**. ⇐ Das ist falsch.

Regeln sind Einbahnstraßen. Hier die letzte Regel:

REGEL IV: Wenn **UU** in einer Ihrer Ketten vorkommt, kann man es streichen.

Aus **UUU** ergibt sich **U**.
Aus **MUUUIII** ergibt sich **MUIII**.

Das wär's. Nun können Sie beginnen, zu versuchen, **MU** zu erzeugen. Es macht nichts, wenn es Ihnen nicht gelingt. Versuchen Sie es ein bißchen – die Hauptsache ist, daß Sie auf den Geschmack dieses MU-Rätsels kommen. Viel Vergnügen.

Übungen 3B[1]

Übersetzungen ohne vorgegebene Interpretation

Paraphrasieren und übersetzen (formalisieren) Sie die folgenden Sätze! Wählen Sie dafür eine geeignete Interpretation:

(I1) Wählen Sie einen Grundbereich (Ihren Bereich der Rede).

(I2) Legen Sie die Bedeutung der Eigennamen und Ihre Wahl der Individuenkonstanten fest.

(I3) Entscheiden Sie über die Stellen- / Argumentzahl der Prädikate und wählen Sie geeignete Prädikatkonstanten.

(4) Beachten Sie ferner, dass alle in Ihren Übersetzungen verwendeten Individuenvariabeln **gebunden** sein müssen, d.h. im Bereich entsprechender Quantoren stehen.

1. Anton schnarcht.

V1.1 Variante 1 – Grundbereich: Menge der Menschen

$S^{(1)} \ldots \iff \ldots$ schnarcht

$a \iff$ Anton

Übersetzung: $S^{(1)}a$

V1.2 Variante 2 – Grundbereich: beliebig

$M^{(1)} \ldots \iff \ldots$ ist Mensch (= zusätzliches Prädikat)

Übersetzung: $M^{(1)}a \wedge S^{(1)}a$

2. Anton liebt Beate.

V2.1 Wie in Variante 1.1 +

$b \iff$ Beate

$L^{(1)} \ldots \iff \ldots$ liebt Beate

Übersetzung: $L^{(1)}a$

V2.2 Wie in Variante 1.1 +

$b \iff$ Beate

[1] Übungen 3B zu den Vorlesungen L2 (20080417) + L3 (20080424

$L^{(2)} \ldots \ldots \iff \ldots$ liebt $\ldots$

Übersetzung: $L^{(2)}ab$ bzw. $L^{(2)}(a, b)$ **bevorzugt!**

3. Anton geht mit Beate ins Kino.

   Übersetzung 1: Ga ($G \ldots \iff \ldots$ geht mit Beate ins Kino)

   Übersetzung 2: Gab ($G \ldots \ldots \iff \ldots$ geht mit $\ldots$ ins Kino)

   Übersetzung 3: $Gabc$, wobei $c \iff$ (das konkrete) Kino und ($G \ldots \ldots \ldots \iff \ldots$ geht mit $\ldots$ ins $\ldots$)

   Für Ü1 + Ü2 ist die Wahl des Grundbereichs = Menge der Menschen vorausgesetzt. Bei Ü3 ließe sich noch der Unterschied

   $M \ldots \iff \ldots$ ist Mensch zu $K \ldots \iff \ldots$ ist Kino

   ausmachen (Typverschiedenheit).

4. Anton besucht mindestens einen von Beates Freunden.

   Übersetzung: $\exists x(Bax \wedge Fxb)$ mit

   $B \ldots \ldots \iff \ldots$ besucht $\ldots$ und

   $F \ldots \ldots \iff \ldots$ ist Freund von $\ldots$

5. Alles ist intelligent.

   Übersetzung 5.1: $\forall x Ix$, wobei ["göttliche" Intelligenz]

   $I \ldots \iff \ldots$ ist intelligent.

   Übersetzung 5.2: $\forall x(Mx \supset Ix)$ ["menschliche" Intelligenz]

6. Delphine sind intelligent.

   Übersetzung: $\forall x(Dx \supset Ix)$ [Delphin-Intelligenz], wobei

   $D \ldots \iff \ldots$ ist Delphin.

7. Es gibt eine intelligente Studentin.

   Übersetzung: $\exists x(Sx \wedge Ix)$

8. Alle, die Freunde haben, haben auch Feinde.

   Übersetzung: $\forall x \exists y(Fyx \supset \exists z Gzx)$ bzw.

$\forall x \exists y \exists z(Fyx \supset Hzx)$, wobei

F … … $\Longleftrightarrow$ … ist Freund von … und

H … … $\Longleftrightarrow$ … ist Feind von …

Beachte die Reihenfolge der Argumentstellen der zweistelligen Prädikate: "Fxy" besagt "x ist Freund von y" bzw. "y hat x als Freund" und **nicht** "y ist Freund von x! Analog für "Hxy".

9. Jemand sucht jemanden.
   Übersetzung: $\exists x \exists y Sxy$
10. Einige Menschen sind nett.
   Übersetzung: $\exists x(Mx \wedge Nx)$
11. Alle Delphine sind Fische.
   Übersetzung: $\forall x(Dx \supset Fx)$
   nun mit F … $\Longleftrightarrow$ … ist Fisch.
12. Kein Wissenschaftler lügt.
   Übersetzung: $\neg \exists x(Wx \wedge Lx)$ bzw. $\forall x(Wx \supset \neg Lx)$
13. Manche Menschen hassen sich selbst.
   Übersetzung: $\exists x(Mx \wedge Hxx)$ [H = hassen]
14. Jeder Mensch hat einen Lieblingsfilm.
   Übersetzung: $\forall x(Mx \supset \exists y(Fy \wedge Lxy))$, wobei
   F … $\Longleftrightarrow$ … ist Film
   L … … $\Longleftrightarrow$ … liebt (hat als Lieblingsfilm) ….
   Zweite (sekundäre) Lesart: $\exists y \forall x((Mx \wedge Fy) \supset Lxy))$

Übersetzungen mit vorgegebener Interpretation

Verwenden Sie die folgenden Abkürzungen:

Vxy : x ist Vater von y
Mxy : x ist Mutter von y
Exy : x ist Ehemann von y
Sxy : x ist Schwester von y
Bxy : x ist Bruder von y
a : Arthur
b : Beate
h : Harry
j : Johanna
wobei sich alle Individuenvariablen auf Menschen beziehen sollen.

Finden Sie geeignete Formalisierungen folgender Sätze:

1. Harry ist Vater.
   $\exists x Vhx$
2. Harry ist Großvater.
   $\exists x \exists y (Vhx \wedge (Vxy \vee Mxy))$
3. Alle Großväter sind Väter.
   $\forall x \exists y \exists z (Vxy \wedge (Vyz \vee Myz) \supset Vxy)$
   vgl. mit
   $\forall x \exists y \exists z (Vxy \wedge (Vyz \vee Myz) \supset \exists y_1 Vxy_1)$ $[y \neq y_1]$
4. Großväter sind keine Großmütter.
   $\forall x \exists y \exists z ((Vxy \wedge (Vyz \vee Myz)) \supset$
   $\supset \neg \exists y_1 \exists z_1 (Mxy_1 \wedge (Vy_1 z_1 \vee My_1 z_!)))$
5. Johanna ist die Enkelin von Arthur.
   $\exists x (Vax \wedge (Vxj \vee Mxj))$
6. Harry ist ein Ehemann.
   $\exists x Ehx$
7. Beate ist eine Ehefrau.
   $\exists x Exb$

8. Alle Ehemänner sind verheiratet.
   $\forall x \exists y (Exy \supset (Exy \vee Eyx))$.
   Man sehe den Unterschied zu
   $\forall x \exists y Exy$
9. Harry und Beate sind miteinander verheiratet.
   Ehb
10. Harrys Großvater ist verheiratet.
    $\exists x \exists y ((Vxy \wedge (Vyh \vee Myh)) \supset \exists z Exz)$
11. Johanna ist Harrys Schwägerin.
    $\exists x ((Sxj \wedge Ehx) \vee (Bxh \wedge Exj))$
12. Arthur ist Johannas Großvater väterlicherseits.
    $\exists x (Vax \wedge Vxj)$
13. Beate ist Arthurs Tante.
    $\exists x ((Sbx \wedge (Mxa \vee Vxa))$ (leiblich) $[\vee \exists y (Exb \wedge Bxy)]$
14. Jede Tante ist eine Schwester.
    $\forall x \exists y \exists z ((Sxy \wedge (Vyz \vee Myz)) \supset Sxy)$
15. Kein Onkel ist gleichzeitig Tante.
    $\neg \exists x \exists y \exists z ((Bxy \wedge (Vyz \vee Myz)) \wedge (Sxy \wedge (Vyz \vee Myz)))$
16. Manche Brüder haben keine Brüder.
    $\exists x \exists y \neg \exists z (Bxy \wedge Bzx)$ bzw. $\exists x \exists y \forall z (Bxy \supset \neg Bzx)$
    Vgl. $\exists x \exists y \neg \exists z ((Bxy \wedge Byx \wedge Bzx)$
    "Brüder sein" kann besagen, jeder Einzelne mindestens ein Geschwisterkind hat. Es kann aber auch heißen, dass zwei (männliche) Personen wechselseitig Brüder sind.
    "Anton und Johannes sind Brüder:
    Übersetzung 1: $\exists x Bax \wedge \exists y Bjy$
    Übersetzung 2: $Baj \wedge Bja$

Allgemeines Problem bei diesen Übersetzungen ist, ob wir das Geschlecht der Personen aus dem Namen entnehmen können. Damit wird dann die Argumentposition in einem zweistelligen Prädikat vorgegeben:
Ehb ist dann in Ordnung; Ebh aber nicht.

Übungen

1. A: Ganghofer; B: folgte auf; C: trifft sich mit; D: Saragat; E: Stalin; F: schwätzt mit.

Diese Ausdrücke sollen Sie in den folgenden Zeilen einzusetzen versuchen. Geben Sie für jede Zeile im linken Lösungsfeld die Buchstaben *aller* Ausdrücke an, die man in dieser Zeile einsetzen kann, so daß ein wahrer oder falscher Satz entsteht. Kreuzen Sie das rechte Lösungsfeld dann an, wenn die Zeile (ohne Einsetzungen) ein Prädikat ist.

Kiesinger ... Erhard
Renate ... Ludwig
... ist kein so reifer Mensch wie Goethe
Nenni steht links von ...
Herr Meier ... Frau Schulze
... überlebt Lenin

2. In den folgenden Sätzen werden verschiedene Vorschläge angedeutet, das Prädikat und die Individuennamen herauszuschälen. Dabei werden die vorgeschlagenen Individuennamen kursiv hervorgehoben; der nicht kursive Rest ist das vorgeschlagene Prädikat. Es wird der Deutlichkeit halber jeweils ausdrücklich wiederholt. Kreuzen Sie jeweils den besten Vorschlag an.

a. *Hans* liebt *Alwine* über *alle Maßen*.
x liebt y über z
Hans liebt *Alwine* über alle Maßen.
x liebt y über alle Maßen
Hans liebt *Alwine* über alle *Maßen*.
x liebt y über alle z

b. *Hans* benimmt *sich Alwine* gegenüber *schäbig*.
x benimmt y z gegenüber u
Hans benimmt *sich Alwine* gegenüber schäbig.
x benimmt y z gegenüber schäbig
Hans benimmt sich *Alwine* gegenüber schäbig.
x benimmt sich y gegenüber schäbig

c. *Alwine* hat von *Hans nichts* mehr gesehen.
x hat von y z mehr gesehen
Alwine hat von *Hans nichts mehr* gesehen.
x hat von y z gesehen
Alwine hat von *Hans* nichts mehr gesehen.
x hat von y nichts mehr gesehen

Zusatzübung

Setzen Sie Individuennamen ein.
1 ... tritt am ... in ... zusammen
2 ... tagt in ...
3 ... berichtet über ...
4 ... ist vorgeschrieben durch ...
5 ... debattiert über ...
a Berlin, b die SZ, c die Verfassung, d der Bundestag, e das Palais Schaumburg, f die Abstimmung, g die Rheinarmee, h der nächste Donnerstag, i das Kabinett, j das Ergebnis, k die Konferenz.

Übungen

1. Finden Sie Ausdrücke, mit denen man jeweils dasselbe Individuum bezeichnen könnte wie die kursiv gedruckten Indikatoren aus dem folgenden Text aus dem Jahre 1960:

Trotz des lebhaften Aufschwungs, den die Wirtschaft Afrikas während des Zweiten Weltkriegs erfahren hat, ist der Umfang *seiner Erzeugung* und *seines Eigenverbrauchs weiterhin* verhältnismäßig niedrig und eine starke Abhängigkeit von *auswärtigem* Kapital kennzeichnend. Da der innerafrikanische Warenaustausch sehr begrenzt ist, ist Afrika mit *seinen* kolonialen Erzeugnissen vornehmlich auf die Industriegebiete Europas und Amerikas angewiesen. Infolge des *vorerst* noch geringen *Eigenverbrauchs* können nicht weniger als 90–100% *der Erzeugung* von Rohstoffen und Halbprodukten an die Industrieländer geliefert werden. Trotzdem ist Afrika nur mit knapp 9% am Welthandel beteiligt. Den größten Teil *davon* bestreiten die Südafrikanische Union und die französischen bzw. *ehemals* französischen Gebiete.

2. Schreiben Sie neben jeden Satz die Nummern aller Sätze, die dasselbe sagen wie dieser Satz. (Nicht alle Sätze sind wahr!)

1 Der Präsident der USA 1918 machte einen 14-Punkte-Plan.
2 Der längste Strom der UdSSR fließt ins Kaspische Meer.
3 Der Autor von ›Egmont‹ war Geschichtsprofessor.
4 Der Jenessei fließt ins Kaspische Meer.
5 Schiller war Geschichtsprofessor.
6 Goethe war Geschichtsprofessor.
7 Wilson machte einen 14-Punkte-Plan.
8 Die Wolga fließt ins Kaspische Meer.
9 Roosevelt machte einen 14-Punkte-Plan.

3. Die folgenden Sätze sind fehlerhaft, weil die scheinbare Kennzeichnung jeweils auf kein oder auf mehrere Dinge zutrifft. Schreiben Sie in das Lösungsfeld »0«, wenn sie auf kein Ding, und »n«, wenn sie auf mehrere Dinge zutrifft.

Der heutige König von Frankreich hat eine Glatze.
Der römische Konsul 68 v. Chr. war sittenlos.
Der Mond des Jupiter umrundet ihn in 4 Tagen.
Die größte Primzahl ist noch unbekannt.
Gestern sahen wir Thomas Manns letzte Komödie.
Adenauers Enkel ist 12 Jahre alt.

Übungen

1. Kreuzen Sie die Prädikate an, aus denen der Satz gebildet sein kann.

Hans glaubt, daß er Alwine mit Peter gesehen hat

x glaubt, daß y y mit z gesehen hat
Hans glaubt, daß x z mit y gesehen hat
x glaubt, daß x Peter mit Alwine gesehen hat
x glaubt, daß x z mit y gesehen hat
Hans glaubt, daß x Alwine mit z gesehen hat
y glaubt, daß z u mit x gesehen hat
x glaubt, daß Hans z mit z gesehen hat
x glaubt, daß x y mit Peter gesehen hat
x glaubt, daß y u mit z gesehen hat
Hans glaubt, daß Peter x mit y gesehen hat
x glaubt, daß y y mit y gesehen hat
x glaubt, daß Hans Alwine mit Peter gesehen hat

2. Kreuzen Sie alle Sätze an, die man aus dem Prädikat bilden kann. (Stören Sie sich nicht daran, wenn der resultierende Satz nicht sinnvoll ist.)

x beruhigt y über das Verhältnis von x mit z

Anton beruhigt Berta über ihr Verhältnis mit ihm
Anton beruhigt Berta über sein Verhältnis mit ihr
Anton beruhigt sich über sein Verhältnis mit Berta
Anton beruhigt sich über das Verhältnis von Christoph mit Berta
Berta beruhigt Anton über das Verhältnis von Christoph mit Dora
Anton beruhigt Christoph über sein Verhältnis mit Emil
Christoph beruhigt sich über sein Verhältnis mit sich selbst
Berta beruhigt Anton über dessen Verhältnis mit Christoph

3. Geben Sie im Lösungsfeld die Stellenzahl der Prädikate an.

x ist älter als y
x bezeichnet x als Dummkopf
x, y und z laufen gleichschnell
x heiratet y auf Wunsch von y
x tötet y, weil y mit der Frau von x ertappt wurde
x vertraut auf y, so wie x auf z vertraut
x liebt y, obgleich y x haßt
x verwechselt y mit dem Vater von y

Übungen 3B[1]

Übersetzungen ohne vorgegebene Interpretation

Paraphrasieren und übersetzen (formalisieren) Sie die folgenden Sätze! Wählen Sie dafür eine geeignete Interpretation:

(I1) Wählen Sie einen Grundbereich (Ihren Bereich der Rede).

(I2) Legen Sie die Bedeutung der Eigennamen und Ihre Wahl der Individuenkonstanten fest.

(I3) Entscheiden Sie über die Stellen- / Argumentzahl der Prädikate und wählen Sie geeignete Prädikatkonstanten.

(I4) Beachten Sie ferner, dass alle in Ihren Übersetzungen verwendeten Individuenvariabeln **gebunden** sein müssen, d.h. im Bereich entsprechender Quantoren stehen.

1. Anton schnarcht.
2. Anton liebt Beate.
3. Anton geht mit Beate ins Kino.
4. Anton besucht mindestens einen von Beates Freunden.
5. Alles ist intelligent.
6. Delphine sind intelligent.
7. Es gibt eine intelligente Studentin.
8. Alle, die Freunde haben, haben auch Feinde.
9. Jemand sucht jemanden.
10. Einige Menschen sind nett.
11. Alle Delphine sind Fische.
12. Kein Wissenschaftler lügt.
13. Manche Menschen hassen sich selbst.
14. Jeder Mensch hat einen Lieblingsfilm.

[1] Übungen 3B zu den Vorlesungen L2 (20080417) + L3 (20080424

Übungen 4[1]

Übersetzungen mit vorgegebener Interpretation

Verwenden Sie die folgenden Abkürzungen:

Vxy : x ist Vater von y
Mxy : x ist Mutter von y
Exy : x ist Ehemann von y
Sxy : x ist Schwester von y
Bxy : x ist Bruder von y
a : Arthur
b : Beate
h : Harry
j : Johanna

wobei sich alle Individuenvariablen auf Menschen beziehen sollen.

Finden Sie geeignete Formalisierungen folgender Sätze:

1. Harry ist Vater.
2. Harry ist Großvater.
3. Alle Großväter sind Väter.
4. Großväter sind keine Großmütter.
5. Johanna ist die Enkelin von Arthur.
6. Harry ist ein Ehemann.
7. Beate ist eine Ehefrau.
8. Alle Ehemänner sind verheiratet.
9. Harry und Beate sind miteinander verheiratet.
10. Harrys Großvater ist verheiratet.
11. Johanna ist Harrys Schwägerin.
12. Arthur ist Johannas Großvater väterlicherseits.
13. Beate ist Arthurs Tante.
14. Jede Tante ist eine Schwester.
15. Kein Onkel ist gleichzeitig Tante.
16. Manche Brüder haben keine Brüder.

[1] Übungen 4 zu der Vorlesung L4: UL 20080508

Übungen 5[1]

1. Stilisierte Übersetzungen

Übersetzen Sie in die Sprache der Aussagenlogik:

(a) q, falls p.
(b) p unter der hinreichenden Bedingung, daß q.
(c) p und q sind notwendige Bedingungen für r.
(d) Die Bedingung p ist sowohl hinreichend als auch notwendig für q.
(e) q nur, falls p.
(f) Weder p, noch q
(g) Weder p noch q nur, falls q und r
(h) Wenn p, so, falls q, dann r

2. Übersetzungen

Verwenden Sie zur Übersetzung die folgende Interpretation:

Grundbereich = die Menge der Spieler einer Fußballmannschaft

Sx: x ist Stürmer	
Vx: x ist Verteidiger	c: Crabb
Tx: x schießt eine Tor	j: Jones
Fx, y: x ist Freund von y	r: Robinson
Bx, y: x spielt den Ball zu y	s: Samson

(a) Samson schießt ein Tor oder Jones schießt ein Tor.
(b) Jones ist kein Freund von Samson.
(c) Weder Samson noch Freunde von Samson schießen ein Tor.
(d) Nur Verteidiger spielen den Ball zu Robinson.
(e) Wenn Crabb ein Tor schießt, dann spielt Samson Robinson den Ball zu und Robinson ist ein Stürmer.
(f) Alle Freunde von Samson sind Freunde von Jones.
(g) Jeder Freund von Robinson ist ein Freund von Samson.
(h) Jones und Samson sind miteinander befreundet.

3. Übersetzungen und Schlüsse (Übergang zu Argumentationen)

Verwenden Sie für Ihre Übersetzung

p : Es regnet. q : Anton kommt. r : Birgit kommt.

Übersetzen Sie die folgenden Argumentationen und diskutieren Sie, ob Ihrer Meinung nach ein zwingender Schluss vorliegt, d.h. prüfen Sie, ob die beiden Prämissen logisch hinreichende Voraussetzungen für die Konklusion sind:

(a) Prämisse A_1: Wenn es regnet, kommt Anton nicht.
Prämisse A_2: Es regnet.
Konklusion B: Also: Anton kommt nicht.
(b) Prämisse A_1: Wenn es regnet, kommt Anton nicht.
Prämisse A_2: Anton kommt nicht.
Konklusion B: Also: Es regnet.
(c) Prämisse A_1: Wenn es regnet, kommt Anton nicht.
Prämisse A_2: Wenn Anton nicht kommt, kommt auch Brigitte nicht.
Konklusion B: Also: Wenn es regnet, kommt Brgitte nicht.

[1] Übungen 5 zu den Vorlesungen L5+L6: UL 20080522+29

Erster Übungszettel zur freiwilligen Abgabe!!!

- Ausgabe am 29. Mai 2008
- **Abgabe in der Woche vom 9. bis 13. Juni 2008** bei dem (der) jeweiligen Tutor(in)
- Die Bearbeitung dieses Übungszettels und die Abgabe sind **freiwillig**. Das Logikteam würde sich jedoch sehr freuen, wenn viele Studierende diese Gelegenheit nutzen. Scheuen Sie sich bitte nicht, Ihre – eventuell auch fragmentarischen – Lösungsvorschläge bzw. Fragen weiterzuleiten.
- Die abgegebenen Zettel werden bewertet und die Lösungen diskutiert.

1. Übersetzungen ohne Vorgaben

Übersetzen Sie die folgenden Sätze in die Sprache der klassischen Logik. Wenn Sie den Grundbereich (Individuenbereich / Bereich der Rede) einschränken, dann geben Sie dies bitte unbedingt an.

1.1 Niemand, der arbeitet, ist faul.
1.2 Alle Stipendienempfänger sind Studenten.
1.3 Nur diejenigen Studenten, die arbeiten, bestehen die Prüfung.
1.4 Es ist nicht alles Gold, was glänzt.

2. Übersetzungen mit Vorgaben

Grund-/Individuenbereich (Bereich der Rede): Menge der Menschen

Ex: x schreitet ein	b: Bernd
Fxy: x ist Freund von y	h: Heinrich
Lxy: x leiht y Geld	m: Maria
Hxy: x heiratet y	

2.1 Bernd ist Freund von Heinrich.
2.2 Bernd bekommt von Maria Geld geliehen.
2.3 Maria hat Freunde, die Geld geliehen bekommen.
2.4 Kein Freund von Heinrich leiht ihm Geld, wenn Maria ihn heiratet.
2.5 Wenn jemand einschreitet, dann wird weder Maria Bernd heiraten noch jemand Freunden von Heinrich Geld zu leihen.
2.6 Nur diejenigen, die Freunde von Maria sind, schreiten ein.

3. Beurteilung von Übersetzungsvorschlägen

Welche der folgenden Übersetzungen (a) bis (d) sind Ihrer Meinung nach intuitiv korrekt. Für die Fälle, die Sie negativ beurteilen, geben Sie bitte eine kurze Begründung an, warum Sie diese Varianten ablehnen:

3.1 Heinrich hat keine Freunde.
(a) $\neg\exists xFxh$ (b) Fxh (c) $\neg\exists xFhx$ (d) $\forall x\neg Fxh$.

3.2 Manche Feunde von Maria schreiten ein.
(a) $\exists x(Fxm \supset Ex)$ (b) $\exists x(Fxm \wedge Ex)$ (c) $\exists xFxm \wedge Ex$ (d) $\neg\forall x(Fxm \supset \neg Ex)$.

3.3 Entweder Maria leiht einem Freund von Bernd Geld oder Heinrich leiht einem Freund von Maria Geld.
(a) $\exists x(Fxb \wedge Lmx) \vee \exists x(Fxm \wedge Lhx)$
(b) $\neg\exists x(Fxb \wedge Lmx) \equiv \exists x(Fxm \wedge Lhx)$
(c) $(\exists x(Fxb \wedge Lmx) \wedge \neg\exists x(Fxm \wedge Lhx)) \vee (\neg\exists x(Fxb \wedge Lmx) \wedge \exists x(Fxm \wedge Lhx))$
(d) $\neg\exists x((Fxb \wedge Lmx) \equiv (Fxm \wedge Lhx))$

Erster Übungszettel zur freiwilligen Abgabe!!!

- Ausgabe am 29. Mai 2008
- **Abgabe in der Woche vom 9. bis 13. Juni 2008** bei dem (der) jeweiligen Tutor(in)
- Die Bearbeitung dieses Übungszettels und die Abgabe sind **freiwillig**. Das Logikteam würde sich jedoch sehr freuen, wenn viele Studierende diese Gelegenheit nutzen. Scheuen Sie sich bitte nicht, Ihre – eventuell auch fragmentarischen – Lösungsvorschläge bzw. Fragen weiterzuleiten.
- Die abgegebenen Zettel werden bewertet und die Lösungen diskutiert.

1. Übersetzungen ohne Vorgaben

Übersetzen Sie die folgenden Sätze in die Sprache der klassischen Logik. Wenn Sie den Grundbereich (Individuenbereich / Bereich der Rede) einschränken, dann geben Sie dies bitte unbedingt an.

1.1 Niemand, der arbeitet, ist faul.

1.1.A) Grundbereich: ohne Einschrünkung

Fx : x ist faul $\quad$ Gx : x arbeitet

$\neg\exists x(Gx \wedge Fx)$ bzw. $\forall x(Gx \supset \neg Fx)$ bzw. $\forall x(Fx \supset \neg Gx)$

1.1.B) Grundbereich: Z.B. Menge der Arbeitenden

$\neg\exists xFx$ bzw. $\forall x\neg Fx)$

1.2 Alle Stipendienempfänger sind Studenten.

1.2.A) Grundbereich: ohne Einschrünkung

Tx : x ist Stipendienempfänger $\quad$ Sx : x ist Student

$\forall x(Tx \supset Sx)$

1.2.B) Grundbereich: Menge der Stipendienempfänger

$\forall xSx$

1.3 Nur diejenigen Studenten, die arbeiten, bestehen die Prüfung.

1.3.A) Grundbereich: ohne Einschrünkung

Px : x besteht die Prüfung

$\forall x(Px \supset Sx \wedge Ax)$

1.3.B) Grundbereich: Menge derjenigen, die die Prüfung bestehen

$\forall x(Sx \wedge Ax)$

Kommentar: Die Einschränkung auf die Menge der Studenten bzw. der Arbeitenden wäre inandäquat.

1.4 Es ist nicht alles Gold, was glänzt.

1.4.A) Grundbereich: ohne Einschrünkung

Lx : x ist Gold $\quad$ Nx : x glänzt

$\neg\forall x(Nx \supset Lx)$ bzw. $\exists x(Nx \wedge \neg Lx)$

1.4.B) Grundbereich: Z.B. Menge des Glänzenden

$\neg\forall xLx$ bzw. $\exists x\neg Lx)$

2. Übersetzungen mit Vorgaben

Grund-/Individuenbereich (Bereich der Rede): Menge der Menschen

Ex: x schreitet ein
Fxy: x ist Freund von y
Lxy: x leiht y Geld
Hxy: x heiratet y

b: Bernd
h: Heinrich
m: Maria

2.1 Bernd ist Freund von Heinrich.

Fbh [Reihenfolge der Argumente!]

2.2 Bernd bekommt von Maria Geld geliehen.

Lmb [Reihenfolge der Argumente!]

2.3 Maria hat Freunde, die Geld geliehen bekommen.

$\exists x(Fxm \wedge \exists yLyx)$ bzw. akzeptiert wird auch $\exists x \exists y(Fxm \wedge Lyx)$

2.4 Kein Freund von Heinrich leiht ihm Geld, wenn Maria ihn heiratet.

$Hmh \supset \neg\exists x(Fxh \wedge Lxh)$ bzw. $Hmh \supset \forall x(Fxh \supset \neg Lxh)$

Vorausgesetzt hierbei ist, dass sich sowohl "ihm" als auch "ihn" auf "Heinrich" beziehen.

2.5 Wenn jemand einschreitet, dann wird weder Maria Bernd heiraten noch jemand Freunden von Heinrich Geld zu leihen.

$\exists xEx \supset (\neg Hmb \wedge \neg\exists y\exists z(Fzh \wedge Lyz))$ oder äquivalente Versionen

2.6 Nur diejenigen, die Freunde von Maria sind, schreiten ein.

$\forall x(Ex \supset Fxm)$ bzw. $\neg\exists x(\neg Fxm \wedge Ex)$

3. Beurteilung von Übersetzungsvorschlägen

Welche der folgenden Übersetzungen (a) bis (d) sind Ihrer Meinung nach intuitiv korrekt. Für die Fälle, die Sie negativ beurteilen, geben Sie bitte eine kurze Begründung an, warum Sie diese Varianten ablehnen:

3.1 Heinrich hat keine Freunde.

(a) $\neg\exists x Fxh$: **korrekt**

(b) Fxh: **nicht korrekt**, da das "x" frei vorkommt

(c) $\neg\exists x Fhx$: **nicht korrekt**, da Fhx" eine andere Bedeutung hat

(d) $\forall x \neg Fxh$: **korrekt**, da logisch gleichwertig mit (a).

3.2 Manche Feunde von Maria schreiten ein.

(a) $\exists x(Fxm \supset Ex)$
nicht korrekt, da "$\supset$" verwendet wurde

(b) $\exists x(Fxm \wedge Ex)$
korrekt

(c) $\exists x Fxm \wedge Ex$
nicht korrekt, da das Vorkommen von "x" in "Ex" frei ist

(d) $\neg\forall x(Fxm \supset \neg Ex)$
korrekt, da logisch gleichwertig mit (b), allerdings umständlicher

3.3 Entweder Maria leiht einem Freund von Bernd Geld oder Heinrich leiht einem Freund von Maria Geld.

(a) $\exists x(Fxb \wedge Lmx) \vee \exists x(Fxm \wedge Lhx)$
nicht korrekt, da das "entweder-oder" einschließend übersetzt wurde

(b) $\neg\exists x(Fxb \wedge Lmx) \equiv \exists x(Fxm \wedge Lhx)$
korrekt als ausschließendes "oder" übersetzt (Kurzfassung)

(c) $(\exists x(Fxb \wedge Lmx) \wedge \neg\exists x(Fxm \wedge Lhx)) \vee (\neg\exists x(Fxb \wedge Lmx) \wedge \exists x(Fxm \wedge Lhx))$
korrekt als ausschließendes "oder" übersetzt (Langfassung)

(d) $\neg\exists x((Fxb \wedge Lmx) \equiv (Fxm \wedge Lhx))$
nicht korrekt, da das "oder" nicht als Hauptverknüpfungszeichen erscheint;
die Übersetzung weicht inhaltlich ab

Übungen 6: System des natürlichen Schließens (SNS) 1[1]

1) Überprüfen Sie folgenden Argumentationen mittels direktem Beweis im SNS!

a) $\dfrac{p \supset (q \supset r) \quad p \wedge q}{r}$

b) $\dfrac{p \supset q \quad q \supset r \quad p}{r}$

c) $\dfrac{p \supset q \quad r \supset s \quad p \wedge r}{q \wedge s}$

d) $\dfrac{(p \vee q) \supset r \quad q}{r \vee \neg q}$

e) $\dfrac{\forall x(Fx \supset Gx) \quad \forall x(Gx \supset Hx) \quad \forall xFx}{\forall xHx}$

f) $\dfrac{\forall x(Fx \supset Gx) \quad \exists xFx}{\exists xGx}$

g) $\dfrac{\exists x(Fx \wedge Gx)}{\exists xFx \wedge \exists xGx}$

h) $\dfrac{\forall x(Fx \supset Gx) \quad \forall xFx}{\forall xGx}$

2) Stellen Sie mittels direktem Beweis fest, was aus den folgenden Annahmen folgt! (Das Ziel ist dabei, alle in den Annahmen vorkommenden Variablen negiert oder unnegiert als Zeilen des Beweises zu erhalten.)

a)		b)		c)	
	$p \supset (q \wedge r)$		$\neg q \supset t$		$\neg r \supset t$
	$p \wedge s$		$\neg p$		$((p \wedge q) \vee r) \supset \neg s$
	$s \supset \neg t$		$t \supset u$		$q \supset s$
	$(r \wedge u) \supset x$		$r \equiv u$		$\neg(w \vee \neg u)$
	$t \vee u$		$p \vee \neg q$		$u \supset \neg(t \vee \neg p)$

3) Überprüfen Sie folgende Aussagen mittels indirektem Beweis im SNS!

a) $\dfrac{\neg\neg p}{p}$

b) $\dfrac{\neg p \supset \neg q \quad q}{p}$

c) $\dfrac{p \supset q \quad \neg q}{\neg p}$

d) $\dfrac{\neg r \quad r \vee \neg q \quad \neg s \supset \neg p \wedge q}{s}$

e) $\dfrac{q \vee \neg p \quad p}{q}$

f) $\dfrac{p \wedge q}{\neg(p \supset \neg q)}$

g) $\dfrac{\neg p \supset q \quad \neg r \supset \neg q \quad \neg r}{p}$

h) $\dfrac{\neg p \supset (q \wedge r) \quad r \supset s \quad \neg(s \vee r)}{p}$

4) Überprüfen Sie die folgenden Argumentation mittels SNS!

a) Wenn Inge nicht Latein studiert, dann studiert sie Französisch oder Spanisch. Wenn Inge Französisch studiert, studiert sie auch Latein und Spanisch. Inge studiert nicht Latein. Also studiert Inge Spanisch.

b) Wenn Petra nicht in Berlin ist, so ist sie in Halle. Wenn Petra nicht in Halle ist, so ist sie in Jena. Petra ist nicht in Berlin oder nicht in Jena sein. Also ist Petra in Halle.

[1] Übungen 6 zu der Vorlesung L7: UL 20080605

Übungen 6: System des natürlichen Schließens (SNS) 1[1]

Lösungen

1) Überprüfen Sie folgenden Argumentationen mittels direktem Beweis im SNS!

a)

(1)	$p \supset (q \supset r)$	AdB
(2)	$p \wedge q$	AdB
(3)	p	BK (2)
(4)	q	BK (2)
(5)	$q \supset r$	AR (1),(3)
(6)	r	AR (5),(4)

b)

(1)	$p \supset q$	AdB
(2)	$q \supset r$	AdB
(3)	p	AdB
(4)	q	AR (1),(3)
(5)	r	AR (2),(4)

c)

(1)	$p \supset q$	Adb
(2)	$r \supset s$	AdB
(3)	$p \wedge r$	AdB
(4)	p	BK (3)
(5)	r	BK (3)
(6)	q	AR (1),(4)
(7)	s	AR (2),(5)
(8)	$q \wedge s$	EK (6),(7)

d)

(1)	$(p \vee q) \supset r$	AdB
(2)	q	AdB
(3)	$p \vee q$	EA (2)
(4)	r	AR (1),(3)
(5)	$r \vee \neg q$	EA (4)

e)

(1)	$\forall x(Fx \supset Gx)$	AdB
(2)	$\forall x(Gx \supset Hx)$	AdB
(3)	$\forall x Fx$	AdB
(4)	$Fx \supset Gx$	B∀ (1) (ohne [i/j])
(5)	$Gx \supset Hx$	B∀ (2) (ohne [i/j])
(6)	Fx	B∀ (3) (ohne [i/j])
(7)	Gx	AR (4),(6)
(8)	Hx	AR (5),(7)
(9)	$\forall x Hx$	E∀ (8)
		(+ x nicht frei in AdB)

f)

(1)	$\forall x(Fx \supset Gx)$	AdB
(2)	$\exists x Fx$	AdB
(3)	Fa	B∃ (2) $[x/a]$
(4)	$Fa \supset Ga$	B∀ (1) $[x/a]$
(5)	Ga	AR (4),(3)
(6)	$\exists x Gx$	E∃ $[x/a]$

g)

(1)	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	AdB
(2)	$Fa \wedge Ga$	B∃ $[x/a]$
(3)	Fa	BK (2)
(4)	Ga	BK (2)
(5)	$\exists x Fx$	E∃ $[x/a]$
(6)	$\exists x Gx$	E∃ $[x/a]$
(7)	$\exists x Fx \wedge \exists x Gx$	EK (5),(6)

h)

(1)	$\forall x(Fx \supset Gx)$	AdB
(2)	$\forall x Fx$	AdB
(3)	$Fx \supset Gx$	B∀ (1)
(4)	Fx	B∀ (2)
(5)	Gx	AR (3),(4)
(6)	$\forall x Gx$	E∀ (5)
		(+ x nicht frei in AdB)

2) Stellen Sie mittels direktem Beweis fest, was aus den folgenden Annahmen folgt! (Das Ziel ist dabei, alle in den Annahmen vorkommenden Variablen negiert oder unnegiert als Zeilen des Beweises zu erhalten.)

a)		b)		c)	
	$p \supset (q \wedge r)$		$\neg q \supset t$		$\neg r \supset t$
	$p \wedge s$		$\neg p$		$((p \wedge q) \vee r) \supset \neg s$
	$s \supset \neg t$		$t \supset u$		$q \supset s$
	$(r \wedge u) \supset x$		$r \equiv u$		$\neg(w \vee \neg u)$
	$t \vee u$		$p \vee \neg q$		$u \supset \neg(t \vee \neg p)$

[1] Übungen 6 zu der Vorlesung L7: UL 20080605

2a)

(1)	$p \supset q \wedge r$	AdB
(2)	$p \wedge s$	AdB
(3)	$s \supset \neg t$	AdB
(4)	$r \wedge u \supset x$	AdB
(5)	$t \vee u$	AdB
(6)	p	BK (2)
(7)	s	BK (2)
(8)	$q \wedge r$	AR (1),(6)
(9)	q	BK (8)
(10)	r	BK (8)
(11)	$\neg t$	AR (3),(7)
(12)	u	BA (5),(11)
(13)	$r \wedge u$	EK (10),(12)
(14)	x	AR (4),(13)
	(6),(7),(9)	
	(10),(11)	
	(12),(14)	

2b)

(1)	$\neg q \supset t$	AdB
(2)	$\neg p$	AdB
(3)	$t \supset u$	Adb
(4)	$r \equiv u$	AdB
(5)	$p \vee \neg q$	AdB
(6)	$\neg q$	BA (5),(2)
(7)	t	AR (1),(6)
(8)	u	AR (3),(7)
(9)	$u \supset r$	BÄ (4)
(10)	r	AR (9),(8)
	(2),(6)	
	(7),(8)	
	(10)	

2c)

(1)	$\neg r \supset t$	AdB
(2)	$(p \wedge q) \vee r \supset \neg s$	AdB
(3)	$q \supset s$	AdB
(4)	$\neg(w \vee \neg u)$	AdB
(5)	$u \supset \neg(t \vee \neg p)$	AdB
(6)	$\neg w \wedge u$	$\vee \rightsquigarrow \wedge$ (4)
(7)	$\neg w$	BK (6)
(8)	u	BK (6)
(9)	$\neg(t \vee \neg p)$	AR (5),(8)
(10)	$\neg t \wedge p$	$\vee \rightsquigarrow \wedge$ (9)
(11)	$\neg t$	BK (10)
(12)	p	BK (10)
(13)	r	MT (1),(11)
(14)	$(p \wedge q) \vee r$	EA (13)
(15)	$\neg s$	AR (2),(14)
(16)	$\neg q$	MT (3),(15)
	(7),(8),(11),(12)	
	(13),(15),(16)	

3) Überprüfen Sie folgende Aussagen mittels indirektem Beweis im SNS!

a)

(1)	$\neg\neg p$	AdB
(2)	$\neg p$	AdiB
	Wsp (1),(2)	

b)

(1)	$\neg p \supset \neg q$	AdB
(2)	q	AdB
(3)	$\neg p$	AdiB
(4)	$\neg q$	AR (1),(3)
	Wsp (2),(4)	

c)

(1)	$p \supset q$	AdB
(2)	$\neg q$	AdB
(3)	p	AdiB
(4)	q	AR (1),(3)
	Wsp (2),(4)	

d)

(1)	$\neg r$	AdB
(2)	$r \vee \neg q$	AdB
(3)	$\neg s \supset \neg p \wedge q$	AdB
(4)	$\neg s$	AdiB
(5)	$\neg q$	BA (2),(1)
(6)	$\neg p \wedge q$	AR (3),(4)
(7)	q	BK (6)
	Wsp (5),(7)	

e) $\dfrac{\begin{array}{c} q \vee \neg p \\ p \end{array}}{q}$

f) $\dfrac{p \wedge q}{\neg(p \supset \neg q)}$

g) $\dfrac{\begin{array}{c} \neg p \supset q \\ \neg r \supset \neg q \\ \neg r \end{array}}{p}$

h) $\dfrac{\begin{array}{c} \neg p \supset (q \wedge r) \\ r \supset s \\ \neg(s \vee r) \end{array}}{p}$

4) Überprüfen Sie die folgenden Argumentation mittels SNS!

a) Wenn Inge nicht Latein studiert, dann studiert sie Französisch oder Spanisch. Wenn Inge Französisch studiert, studiert sie auch Latein und Spanisch. Inge studiert nicht Latein. Also studiert Inge Spanisch.

b) Wenn Petra nicht in Berlin ist, so ist sie in Halle. Wenn Petra nicht in Halle ist, so ist sie in Jena. Petra ist nicht in Berlin oder nicht in Jena sein. Also ist Petra in Halle.

Übungen 7:
System des natürlichen Schließens (SNS) 2[1]

(1) Geben Sie in den folgenden prädikatenlogischen Formeln den jeweiligen Wirkungsbereich (Skopus) der einzelnen Quantoren sowie die freien und gebundenen Vorkommen der Individuenvariablen an:

(1a) $\forall x \exists y(Fxy \wedge Gxy) \supset \exists z Hhy$

(1b) $Fx \supset (\forall y Fy \supset Fx)$

(1c) $(\forall x Fx \wedge \forall x Gx) \supset \exists y Gy \wedge Fx$

(1d) $\exists z((p \wedge \exists x(Fx, y \supset \forall y Gx, y)) \supset (p \wedge Gx, y))$

(2) Symbolisieren und überprüfen Sie die folgenden Sätze mittels SNS unter Verwendung nachstehender Interpretation:

Grundbereich = die Menge der Spieler einer Fußballmannschaft

Sx: x ist Stürmer

Vx: x ist Verteidiger	c: Crabb
Tx: x schießt eine Tor	j: Jones
Fx, y: x ist Freund von y	r: Robinson
Bx, y: x spielt den Ball zu y	s: Samson

(2a) Weder Samson noch Freunde von Samson schießen ein Tor. Samson schießt ein Tor oder Jones schießt ein Tor. Also ist Jones kein Freund von Samson.

(2b) Nur Verteidiger spielen den Ball zu Robinson. Wenn Crabb ein Tor schießt, dann spielt Samson Robinson den Ball zu und Robinson ist ein Stürmer. Crabb schießt ein Tor. Also ist Samson ein Verteidiger.

(2c) Alle Freunde von Samson sind Freunde von Jones. Jeder Freund von Robinson ist ein Freund von Samson. Wenn also Crabb ein Freund von Robinson ist, so ist irgendwer ein Freund von Jones.

(2d) Wenn Samson Stürmer ist, ist Crabb Verteidiger. Wenn weder Robinson noch Jones Stürmer sind, ist Crabb kein Verteidiger. Samson ist Stürmer, wenn es überhaupt einer ist. Wenn also jemand Stürmer ist, ist Jones es nicht.

(2e) Kein Stürmer, der kein Tor schießt, hat Freunde. Robinson und Jones sind beide Stürmer. Jeder Stürmer, der den Ball Jones zuspielt, schießt kein Tor. Wenn also Robinson den Ball Jones zuspielt, dann ist Jones kein Freund von Robinson.

(3) Übersetzen Sie die folgenden Schlüsse unter Verwendung einer geeigneten Interpretation und überprüfen Sie sie mittels SNS!

(3a) Es gibt einen Besitzer eines Fernsehapparats, der kein Stubenhocker ist. Wer ins Strandbad geht und kein Stubenhocker ist, der besitzt keinen Fernsehapparat. Also geht nicht jeder Besitzer eines Fernsehapparats ins Strandbad.

(3b) Wenn alle Basketballspieler der Mannschaft, die am Training teilgenommen haben, größer als 1,90 m sind, so hat die Mannschaft einen Basketballspieler, der nicht am Training teilgenommen hat. Jeder Spieler der Mannschaft hat am Training teilgenommen oder es gibt in der Mannschaft keinen Basketballspieler, der nicht größer als 1,90 m ist.

Folgt hieraus, dass, wenn jeder Basketballspieler der Mannschaft, der größer als 1,90 m ist, am Training teilgenommen hat, ein Spieler zur Mannschaft gehört, der nicht größer als 1,90 m ist und am Training teilgenommen hat?

(4) Zeigen Sie an Hand eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Argumentationen NICHT zwingend sind, d.h., dass sie kein Theorem darstellen!

(4a) $\dfrac{\exists x Fx}{\forall x Fx}$

(4b) $\dfrac{\begin{matrix}\forall x(Fx \vee Gx) \\ \neg \forall x Fx\end{matrix}}{\forall x Gx}$

(4c) $\dfrac{\forall x(Fx \supset Gx)}{\exists x(Fx \wedge Gx)}$

(4d) $\dfrac{\forall x Fx \supset \forall x Gx}{\forall x(Fx \supset Gx)}$

[1] Übungen 7 zu der Vorlesung L8: UL 20080612)

Übungen 7:
System des natürlichen Schließens (SNS) 2[1]

(1) Geben Sie in den folgenden prädikatenlogischen Formeln den jeweiligen Wirkungsbereich (Skopus) der einzelnen Quantoren sowie die freien und gebundenen Vorkommen der Individuenvariablen an:

Hier werden nur die freien Vorkommen der jeweiligen IV angegeben.

(1a) $\forall x \exists y(Fxy \wedge Gxy) \supset \exists z Hhy$

Das y in Hhy ist frei.

(1b) $Fx \supset (\forall y Fy \supset Fx)$

Beide Vorkommen von x in Fx sind frei.

(1c) $(\forall x Fx \wedge \forall x Gx) \supset \exists y Gy \wedge Fx$

Das Vorkommen von x im letzten Fx ist frei.

(1d) $\exists z((p \wedge \exists x(Fxy \supset \forall y Gxy)) \supset (p \wedge Gxy))$

Das Vorkommen von y in Fxy und die Vorkommen von x und y in Gxy sind frei.

(2) Symbolisieren und überprüfen Sie die folgenden Sätze mittels SNS unter Verwendung nachstehender Interpretation:

Grundbereich = die Menge der Spieler einer Fußballmannschaft

Sx: x ist Stürmer

Vx: x ist Verteidiger	c: Crabb
Tx: x schießt eine Tor	j: Jones
Fxy: x ist Freund von y	r: Robinson
Bxy: x spielt den Ball zu y	s: Samson

(2a) Weder Samson noch Freunde von Samson schießen ein Tor. Samson schießt ein Tor oder Jones schießt ein Tor. Also ist Jones kein Freund von Samson [$\neg Fjs$].

(1)	$\neg Ts \wedge \forall x(Fxs \supset \neg Tx)$	AdB
(2)	$Ts \vee Tj$	AdB
(3)	$\neg Ts$	BK (1)
(4)	$\forall x(Fxs \supset \neg Tx)$	BK (1)
(5)	Tj	BA (2),(3)
(6)	$Fjs \supset \neg Tj$	B$\forall$ (4) $[x/j]$
(7)	$\neg Fjs$	MT (6),(5)

(2b) Nur Verteidiger spielen den Ball zu Robinson. Wenn Crabb ein Tor schießt, dann spielt Samson Robinson den Ball zu und Robinson ist ein Stürmer. Crabb schießt ein Tor. Also ist Samson ein Verteidiger [Vs].

(1)	$\forall x(Bxr \supset Vx)$	AdB
(2)	$Tc \supset Bsr \wedge Sr$	AdB
(3)	Tc	AdB
(4)	$Bsr \wedge Sr$	AR (2),(3)
(5)	Bsr	BK (4)
(6)	$Bsr \supset Vs$	B$\forall$ (1) $[x/s]$
(7)	Vs	AR (5),(6)

[1] Übungen 7 zu der Vorlesung L8: UL 20080612)

(2c) Alle Freunde von Samson sind Freunde von Jones. Jeder Freund von Robinson ist ein Freund von Samson. Wenn also Crabb ein Freund von Robinson ist [weitere Prämisse: Fcr], so ist irgendwer ein Freund von Jones [$\exists x Fxj$].

(1)	$\forall x(Fxs \supset Fxj)$	AdB
(2)	$\forall x(Fxr \supset Fxs)$	AdB
(3)	Fcr	AdB
(4)	$Fcr \supset Fcs$	B$\forall$ (2) $[x/c]$
(5)	Fcs	AR (3),(4)
(6)	$Fcs \supset Fcj$	B$\forall$ (1) $[x/c]$
(7)	Fcj	AR (5),(6)
(8)	$\exists x Fxj$	E$\exists$ (7) $[x/c]$

Kommentar zum Kommentar in Zeile (8): Es wurde in der VL diese Schreibweise eingeführt, d.h. wir betrachten Fcj als das Ergebnis der Einsetzung von c für x in Fxj. Sollten die Studierenden $[c/x]$ angeben, werden wir es tolerieren!

(2d) Wenn Samson Stürmer ist, ist Crabb Verteidiger. Wenn weder Robinson noch Jones Stürmer sind, ist Crabb kein Verteidiger. Samson ist Stürmer, wenn es überhaupt einer ist. Wenn also jemand Stürmer ist [weitere Prämisse: $\exists x Sx$], ist Jones es nicht [$\neg Sj$].

(1)	$Ss \supset Vc$	AdB
(2)	$\neg Sr \wedge \neg Sj \supset \neg Vc$	AdB
(3)	$\exists x Sx \supset Ss$	AdB
(4)	$\exists x Sx$	AdB
(5)	Ss	AR (3),(4)
(6)	Vc	AR (1),(5)
(7)	$\neg(\neg Sr \wedge \neg Sj)$	MT (2),(6)
(8)	$Sr \vee Sj$	$\wedge \rightsquigarrow \vee$ (7)
	Abbruch	

Diese Argumentation ist damit vermutlich NICHT zwingend bzw. stellt KEIN Theorem dar. Um zu zeigen, dass dies so ist, müsste es gelingen ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben:

Z.B. $Ss = 1$, $Vc = 1$, $Sj = 1$ und $Sr = 1$.

(2e) Kein Stürmer, der kein Tor schießt, hat Freunde. Robinson und Jones sind beide Stürmer. Jeder Stürmer, der den Ball Jones zuspielt, schießt kein Tor. Wenn also Robinson den Ball Jones zuspielt [neue Prämisse: Brj], dann ist Jones kein Freund von Robinson [$\neg Fjr$].

(1)	$\forall x(Sx \wedge \neg Tx \supset \neg \exists y Fyx)$	AdB bzw. $\neg \exists x((Sx \wedge \neg Tx) \wedge \exists y Fyx)$
(2)	$Sr \wedge Sj$	AdB
(3)	$\forall x(Sx \wedge Bxj \supset \neg Tx)$	AdB
(4)	Brj	AdB
(5)	Sr	BK (2)
(6)	$Sr \wedge Brj$	EK (5),(4)
(7)	$Sr \wedge Brj \supset \neg Tr$	B$\forall$ (3) $[x/r]$
(8)	$\neg Tr$	AR (6),(7)
(9)	$Sr \wedge \neg Tr$	EK (5),(8)
(10)	$Sr \wedge \neg Tr \supset \exists y Fyr$	
(11)	$\neg \exists y Fy$	AR (9),(10)
(12)	$\forall y \neg Fyr$	$\exists \rightsquigarrow \forall$
(13)	$\neg Fjr$	B$\forall$ (12) $[y/j]$

(3) Übersetzen Sie die folgenden Schlüsse unter Verwendung einer geeigneten Interpretation und überprüfen Sie sie mittels SNS!

(3a) Es gibt einen Besitzer eines Fernsehapparats, der kein Stubenhocker ist. Wer ins Strandbad geht und kein Stubenhocker ist, der besitzt keinen Fernsehapparat. Also geht nicht jeder Besitzer eines Fernsehapparats ins Strandbad.

(1)	$\exists x(Fx \wedge \neg Sx)$	AdB
(2)	$\forall x(Bx \wedge \neg Sx \supset \neg Fx)$	AdB
(3)	$\forall x(Fx \supset Bx)$	AdiB
(4)	$Fa \wedge \neg Sa$	B$\exists$ (1) $[x/a]$
(5)	Fa	BK (4)
(6)	$\neg Sa$	BK (4)
(7)	$Fa \supset Ba$	B$\forall$ (3) $[x/a]$
(8)	Ba	AR (5),(7)
(9)	$Ba \wedge \neg Sa \supset \neg Fa$	B$\forall$ (2) $[x/a]$
(10)	$Ba \wedge \neg Sa$	EK (6),(8)
(11)	$\neg Fa$	AR (9),(10)
	Wsp. (5),(11)	

(3b) Wenn alle Basketballspieler der Mannschaft, die am Training teilgenommen haben, größer als 1,90 m sind, so hat die Mannschaft einen Basketballspieler, der nicht am Training teilgenommen hat. Jeder Spieler der Mannschaft hat am Training teilgenommen oder es gibt in der Mannschaft keinen Basketballspieler, der nicht größer als 1,90 m ist.

Folgt hieraus, dass, wenn jeder Basketballspieler der Mannschaft, der größer als 1,90 m ist, am Training teilgenommen hat [neue Prämisse: $\forall x(Gx \supset Tx)$], ein Spieler zur Mannschaft gehört, der nicht größer als 1,90 m ist und am Training teilgenommen hat [$\exists x(\neg Gx \wedge Tx)$]?

Grundbereich = Menge der Basketballspieler der MAnnschaft

(1)	$\forall x(Tx \supset Gx) \supset \exists x \neg Tx$	AdB
(2)	$\forall x Tx \vee \neg \exists x \neg Gx$	AdB
(3)	$\forall x(Gx \supset Tx)$	AdB
(4)	$\neg \exists x(\neg Gx \wedge Tx)$	AdiB
(5)	$\forall x \neg(\neg Gx \wedge Tx)$	$\exists \rightsquigarrow \forall$
(6)	$\neg(\neg Gx \wedge Tx)$	B$\forall$ (5)
(7)	$\neg Gx \supset \neg Tx$	$\wedge \rightsquigarrow \supset$ (6)
(8)	$Tx \supset Gx$	KP (7)
(9)	$\forall x(Tx \supset Gx)$	E$\forall$ (8) [x kommt nicht frei in den AdB vor!]
(10)	$\exists x \neg Tx$	AR (1),(9)
(11)	$\neg Ta$	B$\exists$ (10) $[x/a]$
(12)	$Ga \supset Ta$	B$\forall$ (3) $[x/a]$
(13)	$\neg Ga$	MT 12),(11)
(14)	$\exists x \neg Gx$	E$\exists$ (13) $[x/a]$
(15)	$\forall x Tx$	BA (2),(14)
(16)	Ta	B$\forall$ (15) $[x/a]$
	Wsp. (11),(16)	

(4) Zeigen Sie an Hand eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Argumentationen NICHT zwingend sind, d.h., dass sie kein Theorem darstellen!

Alle Gegenbeispiele lassen sich in einem Bereich mit zwei Individuen angeben. Als Veranschaulichung kann man sich eine Urne mit den beiden Kugeln a und b vorstellen. Der Ausdruck Fx wird gelesen als "x ist rot" und der Ausdruck Gx als "x ist grün".

(4a) $\dfrac{\exists x Fx}{\forall x Fx}$

$(Fa$	$\vee$	$Fb)$	$\supset$	$(Fa$	$\wedge$	$Fb)$
1	1	0	0	1	0	0

oder

$(Fa$	$\vee$	$Fb)$	$\supset$	$(Fa$	$\wedge$	$Fb)$
0	1	1	0	0	0	1

D.h., genau eine der beiden Kugeln ist rot.

(4b) $\dfrac{\forall x(Fx \vee Gx) \quad \neg\forall x Fx}{\forall x Gx}$

$((($	Fa	$\vee$	$Ga)$	$\wedge$	$(Fb$	$\vee$	$Gb))$	$\wedge$	$\neg$	$(Fa$	$\wedge$	$Fb))$	$\supset$	$(Ga$	$\wedge$	$Gb)$
	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1

oder

$((($	Fa	$\vee$	$Ga)$	$\wedge$	$(Fb$	$\vee$	$Gb))$	$\wedge$	$\neg$	$(Fa$	$\wedge$	$Fb))$	$\supset$	$(Ga$	$\wedge$	$Gb)$
	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0

D.h., beide Kugeln sind verschiedenfarbig.

(4c) $\dfrac{\forall x(Fx \supset Gx)}{\exists x(Fx \wedge Gx)}$

$((Fa$	$\supset$	$Ga)$	$\wedge$	$(Fb$	$\supset$	$Gb))$	$\supset$	$((Fa$	$\wedge$	$Ga)$	$\vee$	$(Fb$	$\wedge$	$Gb))$
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Alle Varianten mit $Fa = 0$ und $Fb = 0$ ergeben bei beliebigen Werten für Ga und Gb Gegenbeispiele. Der Schluss wird erst dann zwingend, wenn es mindestens ein Objekt mit der Eigenschaft F gibt: Wenn wir also die Annahme $\exists x Fx$ hinzufügen, erhalten wir ein Theorem.

(4d) $\dfrac{\forall x Fx \supset \forall x Gx}{\forall x(Fx \supset Gx)}$

$((Fa$	$\wedge$	$Fb)$	$\supset$	$(Ga$	$\wedge$	$Gb))$	$\supset$	$((Fa$	$\supset$	$Ga)$	$\wedge$	$(Fb$	$\supset$	$Gb))$
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0

Zweiter Übungszettel zur freiwilligen Abgabe!!!

- Ausgabe am 26. Juni 2008
- **Abgabe in der Woche vom 30. Juni bis 4. Juli 2008** bei dem (der) jeweiligen Tutor(in)
- Die Bearbeitung dieses Übungszettels und die Abgabe sind **freiwillig**. Das Logikteam würde sich jedoch sehr freuen, wenn viele Studierende diese Gelegenheit nutzen. Scheuen Sie sich bitte nicht, Ihre – eventuell auch fragmentarischen – Lösungsvorschläge bzw. Fragen weiterzuleiten.
- Die abgegebenen Zettel werden auswertet und die Lösungen können auf Wunsch noch in den Übungen vom 14. bis 17. Juli diskutiert werden. Die Lösungen werden am 7. Juli im Logikordner bei Frau Poller (GWZ 2109, Mo-Do jeweils 9-14 Uhr) als Kopiervorlage zur Verfügung gestellt.

1. Syntax der Prädikatenlogik

Geben Sie in den folgenden prädikatenlogischen Formeln die Wirkungsbereiche der einzelnen Quantoren sowie die freien und gebundenen Vorkommen der Individuenvariablen an.
Beispiele: Der Wirkungsbereich des Quantorausdrucks $\exists y$ ist .... Das Vorkommen von x in Fxy ist frei/gebunden.

(1a) $\forall x(Fx \wedge Gx) \supset (Fx \wedge Gy)$

(1b) $\forall x(Fy \supset (\forall y Fy \supset Fx))$

(1c) $(\exists x Fx \wedge \exists x Gx) \supset (\exists x Gx \wedge Fx)$

(1d) $\forall x(Fxy \supset Gxy) \supset (\forall y Fxy \supset \forall x Gxy)$

2. Natürliches Schließen

Übersetzen Sie die folgenden Argumentationen unter Verwendung einer geeigneten Interpretation und überprüfen Sie Ihre Übersetztung mittels SNS! Schränken Sie dabei den Gundbereich NICHT ein.

(2a) Jeder, der Georg und Maria kennt, verehrt Maria.
Einige, die Maria kennen, verehren sie nicht.
Also kennen einige, die Maria kennen, Georg nicht.

(2b) Alles ist entweder Substanz oder Attribut.
Modi sind nicht Substanzen.
Also sind Modi Attribute.

3. Widerlegung von Argumentationen

Zeigen Sie an Hand eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Argumentationen NICHT zwingend sind, d.h., dass sie kein Theorem darstellen!

(3a) $\dfrac{\exists x \neg Fx}{\neg \exists x Fx}$ (3b) $\dfrac{\forall x(Fx \supset Gx) \quad \exists x Fx}{\forall x Gx}$

Zweiter Übungszettel zur freiwilligen Abgabe!!!

- Ausgabe am 26. Juni 2008
- **Abgabe in der Woche vom 30. Juni bis 4. Juli 2008** bei dem (der) jeweiligen Tutor(in)
- Die Bearbeitung dieses Übungszettels und die Abgabe sind **freiwillig**. Das Logikteam würde sich jedoch sehr freuen, wenn viele Studierende diese Gelegenheit nutzen. Scheuen Sie sich bitte nicht, Ihre – eventuell auch fragmentarischen – Lösungsvorschläge bzw. Fragen weiterzuleiten.
- Die abgegebenen Zettel werden auswertet und die Lösungen können auf Wunsch noch in den Übungen vom 14. bis 17. Juli diskutiert werden.

1. Syntax der Prädikatenlogik

Geben Sie in den folgenden prädikatenlogischen Formeln die Wirkungsbereiche der einzelnen Quantoren sowie die freien und gebundenen Vorkommen der Individuenvariablen an.
Beispiele: Der Wirkungsbereich des Quantorausdrucks $\exists y$ ist .... Das Vorkommen von x in Fxy ist frei/gebunden.

Hier werden nur die freien Vorkommen der jeweiligen IV angegeben.

(1a) $\forall x(Fx \wedge Gx) \supset (Fx \wedge Gy)$

Das Vorkommen von x im zweiten Vorkommen von Fx und das Vorkommen von y in Gy sind frei.

(1b) $\forall x(Fy \supset (\forall yFy \supset Fx))$

Das Vorkommen von y im ersten Vorkommen von Fy ist frei.

(1c) $(\exists xFx \wedge \exists xGx) \supset (\exists xGx \wedge Fx)$

Das letzte Vorkommen von x ist frei.

(1d) $\forall x(Fxy \supset Gxy) \supset (\forall yFxy \supset \forall xGxy)$

Die Vorkommen von y in den ersten Vorkommen von Fxy und Gxy sind frei. Außerdem ist das Vorkommen von x im zweiten Vorkommen von Fxy frei. Und schließlich ist das Vorkommen von y im zweiten Vorkommen von Gxy frei.

2. Natürliches Schließen

Übersetzen Sie die folgenden Argumentationen unter Verwendung einer geeigneten Interpretation und überprüfen Sie Ihre Übersetztung mittels SNS! Schränken Sie dabei den Gundbereich NICHT ein.

(2a) Jeder, der Georg und Maria kennt, verehrt Maria.

Einige, die Maria kennen, verehren sie nicht.

Also kennen einige, die Maria kennen, Georg nicht.

Direkter Beweis:

(1)	$\forall x((Kxg \land Kxm) \supset Vxm)$	AdB
(2)	$\exists x(Kxm \land \neg Vxm)$	AdB
(3)	$Kam \land \neg Vam$	B$\exists$ (2) $[x/a]$
(4)	Kam	BK (3)
(5)	$\neg Vam$	BK (3)
(6)	$(Kag \land Kam) \supset Vam$	B$\forall$ (1) $[x/a]$
(7)	$\neg(Kag \land Kam)$	MT (6),(5)
(8)	$\neg Kag \lor \neg Kam$	$\land \rightsquigarrow \lor$
(9)	$\neg Kag$	BA (8),(4)
(10)	$Kam \land \neg Kag$	EK (4),(9)
(11)	$\exists x(Kxm \land \neg Kxg)$	E$\exists$ (10) $[x/a]$

(2b) Alles ist entweder Substanz oder Attribut.
Modi sind nicht Substanzen.
Also sind Modi Attribute.

Indirekter Beweis:

(1)	$\forall x(\neg Sx \equiv Ax)$	AdB
(2)	$\forall x(Mx \supset \neg Sx)$	AdB
(3)	$\neg\forall x(Mx \supset Ax)$	AdiB
(4)	$\exists x\neg(Mx \supset Ax)$	$\forall \rightsquigarrow \exists$ (3)
(5)	$\neg(Ma \supset Aa)$	B$\exists$ (4) $[x/a]$
(6)	$Ma \land \neg Aa$	$\supset\rightsquigarrow \land$ (5)
(7)	Ma	BK (6)
(8)	$\neg Aa$	BK (6)
(9)	$\neg Sa \equiv Aa$	B$\forall$ (1) $[x/a]$
(10)	$Ma \supset \neg Sa$	B$\forall$ (2) $[x/a]$
(11)	$\neg Sa$	AR (10),(7)
(12)	$\neg Sa \supset Aa$	BÄ (9)
(13)	Aa	AR (12),(11)
	Wsp. (13),(8)	

Direkter Beweis mit zusätzlicher Annahme

(1)	$\forall x(\neg Sx \equiv Ax)$	AdB
(2)	$\forall x(Mx \supset \neg Sx)$	AdB
(3)	$\neg Sx \equiv Ax$	B$\forall$ (1)
(4)	$Mx \supset \neg Sx$	B$\forall$ (2)
(1.1)	Mx	z.A.
(1.2)	$\neg Sx$	AR (4),(1.1)
(5)	$\neg Sx \supset Ax$	BÄ (3) (echte Zeile, da unabhängig von (1.1))
(1.3)	Ax	AR (5),(1.2)
(6)	$Mx \supset Ax$	(1.1) $\supset$ (1.3)
(7)	$\forall x(Mx \supset Ax)$	E$\forall$ (6)

3. Widerlegung von Argumentationen

Zeigen Sie an Hand eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Argumentationen NICHT zwingend sind, d.h., dass sie kein Theorem darstellen!

(3a) $\dfrac{\exists x \neg Fx}{\neg \exists x Fx}$

$(\neg$	Fa	$\vee$	$\neg$	$Fb)$	$\supset$	$\neg$	$(Fa$	$\vee$	$Fb)$
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0

(3b) $\dfrac{\forall x(Fx \supset Gx) \quad \exists x Fx}{\forall x Gx}$

$((Fa$	$\supset$	$Ga)$	$\wedge$	$(Fb$	$\supset$	$Gb))$	$\wedge$	$(Fa$	$\vee$	$Fb)$	$\supset$	$(Ga$	$\wedge$	$Gb)$
1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1